Exercice 1

On pose : I = $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx$ et J = $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$

1) Calculer I + J et I – J.
2) En déduire I et J.

Exercice 2

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}\,; \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx\,; \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx.$$

1. Calcul de I

Soit la fonction *f* définie sur [0; 1] par $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+2})$.

a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$.
b) En déduire la dérivée *f ´* de *f*.
c) Calculer la valeur de I.
2. Calcul de J et de K
a) Sans calculer explicitement J et K, vérifier que : J + 2I = K.
b) À l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, montrer que :
$K = \sqrt{3} - J$.
c) En déduire les valeurs de J et de K.

Exercice 3

On pose $I_0 = \int_1^e x\,dx$ et $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n\,dx$ pour tout *n* entier non nul.

1. Calculer I_0 et I_1. (on pourra utiliser une intégration par parties).
2. Montrer que pour tout *n* entier $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$. Calculer I_2.
3. Montrer que pour tout *n* entier, $I_{n+1} \le I_n$. En déduire en utilisant la relation du 2° l'encadrement suivant : $\frac{e^2}{n+3} \le I_n \le \frac{e^2}{n+2}$.
4. Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim_{n\to+\infty} nI_n$

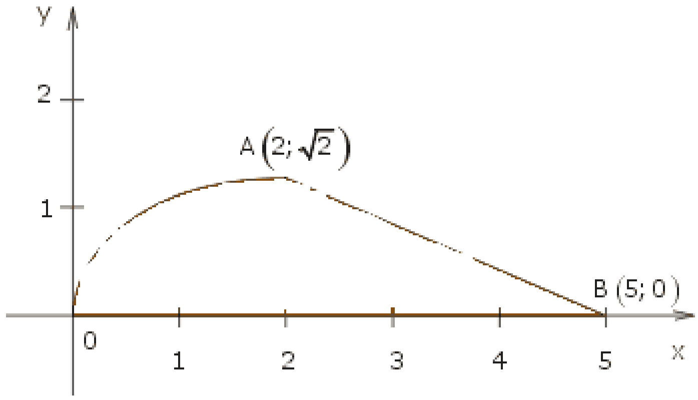
Exercice 4

On considère l'intégrale : $I_n = \int_0^1 t^n e^{2t}\,dt$, où n est un entier naturel non nul.

1) En utilisant une intégration par parties, calculer I_1.
2) En utilisant une intégration par parties, trouver une relation entre I_{n+1} et I_n.
3) En déduire I_2 et I_3 .
4) Utiliser les résultats précédents pour calculer l'intégrale : I = $\int_0^1 (t^3 + 3t^2 + 2t)e^{2t}\,dt$.

Exercice 5

Dans un repère orthonormal , (unité graphique :1 cm), on considère la courbe composée de l'arc (OA) d'équation : $y=\sqrt{x}$, pour $x \in [0\ ;2]$, et du segment [AB], où A(2 ; $\sqrt{2}$) et B(5; 0).



Calculer la valeur exacte (en cm^3) du volume V du solide (S) engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine plan coloré.
Donner une valeur approchée de V en cm^3(à un mm^3 près).

Exercice 6

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul.

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n=\int_0^2 (\frac{2t+3}{t+2})e^{\frac{t}{n}}dt$.

1)a)Soit φ la fonction définie sur [0 ;2] par : $\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$. Etudier les variations de φ sur [0 ;2]. En déduire que, pour tout réel t de [0 ;2], $\frac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \frac{7}{4}$.

b)Montrer que, pour tout réel t de [0 ;2], on a : $\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t)\, e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4}\, e^{\frac{t}{n}}$.

c)Par intégration, en déduire que : $\frac{3}{2}n\,(e^{\frac{2}{n}}-1) \leq U_n \leq \frac{7}{4}n\,(e^{\frac{2}{n}}-1)$.

d)On rappelle que : $\lim_{h\to 0}\left(\frac{e^h-1}{h}\right)=1$. Montrer que, si (U_n) possède une limite L, alors, $3 \leq L \leq \frac{7}{2}$.

2)a)Vérifier que, pour tout dans I, on a : $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$.

En déduire l'intégrale $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}dt$.

b)Montrer que, pour tout t dans [0 ;2], on a : $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$. En déduire que : $I \leq U_n \leq e^{\frac{2}{n}} \times I$.
c)Montrer que (U_n) est convergente et déterminer sa limite L

Exercice 7

L'objectif est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \text{ et, pour } n \geq 1,\ u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x .$$

1. *a)* Soit f la fonction numérique définie sur [0 ; 1] par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Calculer la dérivée f' de f. En déduire u_0 .
b) Calculer u_1.
2. *a)* Prouver que la suite (u_n) est décroissante (on ne cherchera pas à calculer u_n).
En déduire que la suite (u_n) est convergente.
b) Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 1], on a :

$$1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}\,.$$

En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$(1) \qquad \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}\,.$$

Déterminer la limite de (u_n).

3. Pour tout entier n ≥ 3, on pose : $\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

a) Vérifier que, pour tout entier $n \geq 3$, on a : $u_n + u_{n-2} = \mathrm{I}_n$.
Par une intégration par parties portant sur I_n, montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$nu_n + (n-1)\,u_{n-2} = \sqrt{2}\,.$$

b) En déduire que, pour tout entier n ≥ 3, on a :

$$(2) \qquad (2n-1)u_n \leq \sqrt{2}\,.$$

c) À l'aide des inégalités (1) et (2), montrer que la suite (nu_n) est convergente et calculer sa limite.

http://afimath.jimdo.com/

Exercice 1

$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx \qquad J=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$

1) $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x+\sin x}{\cos x+\sin x}dx$ d'après la propriété de linéarité

$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{3}}1\cdot dx=[x]_0^{\frac{\pi}{3}}$ d'où $\boxed{I+J=\frac{\pi}{3}}$

$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{u'(x)}{u(x)}dx$

En posant $u(x)=\cos x+\sin x$ on a $u'(x)=\cos x-\sin x$

donc $\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\frac{u'(x)}{u(x)}$ d'où $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{u'(x)}{u(x)}dx=[\ln(u(x))]_0^{\frac{\pi}{3}}=\left[\ln\left(\cos x+\sin x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

soit $I-J=\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\ln 1 \Leftrightarrow \boxed{I-J=\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)}$.

2) On a le système formé des deux équations: $I+J=\frac{\pi}{3}$ (1) et $I-J=\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ (2)

$(1)+(2)\Rightarrow \boxed{I=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\times\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)}$, $(1)-(2)\Rightarrow \boxed{J=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\times\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)}$.

Exercice 2

1) $\mathrm{I}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}}$; $\mathrm{J}=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x$; $\mathrm{K}=\int_0^1\sqrt{x^2+2}\mathrm{d}x$. $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+2})$

a) Posons $g(x)=\sqrt{x^2+2}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et :

$g'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}$ soit $\boxed{g'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}$.

b) $f(x)=\ln\left(u(x)\right)$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et : $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$

avec $u(x)=x+\sqrt{x^2+2}=x+g(x)\Leftrightarrow u'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\Leftrightarrow u'(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}}$

Donc on a: $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+2}}\times\frac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}}\Leftrightarrow \boxed{f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}}$.

c) $\mathrm{I}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx=\int_0^1 f'(x)dx=[f(x)]_0^1=f(1)-f(0)$

soit $I=\ln\left(1+\sqrt{3}\right)-\ln\sqrt{2}\Leftrightarrow \boxed{I=\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$

2) $\mathrm{I}=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}}$; $\mathrm{J}=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x$; $\mathrm{K}=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,\mathrm{d}x$

a) $J+2I=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\mathrm{d}x+2\times\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}}=\int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}dx=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx \left(car\ \frac{a}{\sqrt{a}}=\sqrt{a} \right)$.

Donc on a bien : $\boxed{J+2I=K}$

b) $K=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx=\int_0^1 1\times\sqrt{x^2+2}\,dx$

En utilise une intégration par parties: on pose $u'(x)=1$ $\quad v(x)=\sqrt{x^2+2}$

$u(x)=x \quad v'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

$$K=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx=[uv]_0^1-\int_0^1 u\times v'dx \Leftrightarrow K=\left[x\times\sqrt{x^2+2}\right]_0^1-\int_0^1 x\times\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx$$

$$K=\left[x\times\sqrt{x^2+2}\right]_0^1-\int_0^1 x\times\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx=\left[x\times\sqrt{x^2+2}\right]_0^1-\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx=\left[x\times\sqrt{x^2+2}\right]_0^1-J.$$

Finalement on a : $\boxed{K=3-J}$.

c) En utilisant les deux relations: $J+2I=K\ (1)$ et $K=3-J\ (2)$

On reporte l'quation (2) dans (1) on obtient: $J+2I=3-J \Leftrightarrow 2J=3-2I \Leftrightarrow \boxed{J=\frac{3}{2}-I}$.

Soit d'après la question 1) $\boxed{J=\frac{3}{2}-\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$

La relation (2) donne $K=3-J$ soit $K=3-\frac{3}{2}+\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{K=\frac{3}{2}+\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$.

Exercice 3

On considère l'intégrale : $I_n=\int_0^1 t^n e^{2t}dt$, où n est un entier naturel non nul.

1) $I_1=\int_0^1 te^{2t}dt$ on pose : $u(t)=t$ et $v'(t)=e^{2t}$, d'où : $u'(t)=1$ et $v(t)=\frac{1}{2}e^{2t}$

Donc $I_1=\left[t\times\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^1-\int_0^1 1\times\frac{1}{2}e^{2t}dt \Leftrightarrow I_1=\left[\frac{t}{2}\times e^{2t}\right]_0^1-\left[\frac{1}{4}e^{2t}\right]_0^1 \Leftrightarrow \boxed{I_1=\frac{e^2+1}{4}}$.

2) $I_n=\int_0^1 t^n e^{2t}dt$, on pose : $u'(t)=t^n$ et $v(t)=e^{2t}$, d'où : $u(t)=\frac{t^{n+1}}{n+1}$ et $v'(t)=2e^{2t}$

$$I_n=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\times e^{2t}\right]_0^1-\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\times 2e^{2t}dt \Leftrightarrow I_n=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\times e^{2t}\right]_0^1-\frac{2}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}e^{2t}dt$$

$$\Leftrightarrow I_n=\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\times e^{2t}\right]_0^1-\frac{2}{n+1}\times I_{n+1} \Leftrightarrow I_n=\frac{e^2}{n+1}-\frac{2}{n+1}\times I_{n+1} \Leftrightarrow \boxed{2I_{n+1}=e^2-(n+1)I_n}.$$

3) on prend $n=1$, $2I_2 = e^2 - 2I_1 \Leftrightarrow I_2 = \dfrac{e^2}{2} - I_1 \Leftrightarrow I_2 = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{e^2+1}{4} \Leftrightarrow \boxed{I_2 = \dfrac{e^2-1}{4}}$.

si $n=2$, alors: $2I_3 = e^2 - 3I_2 \Leftrightarrow I_3 = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{3}{2}I_2 \Leftrightarrow I_3 = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{3}{2}\dfrac{e^2-1}{4} \Leftrightarrow \boxed{I_3 = \dfrac{e^2+3}{8}}$.

4) I = (t3 + 3t2 + 2t)e2t dt .

$I = \int_0^1 \left(t^3+3t^2+2t\right)e^{2t}dt = \int_0^1 t^3 e^{2t}dt + \int_0^1 3t^2 e^{2t}dt + 2\int_0^1 te^{2t}dt$ En utilisant la linéarité de l'intégrale.

$\boxed{I = I_3 + 3I_2 + 2I_1}$

$I = \dfrac{e^2+3}{8} + 3\dfrac{e^2-1}{4} + 2\dfrac{e^2+1}{4} \Leftrightarrow I = \dfrac{e^2+6e^2+4e^2+3-6+4}{8} \Leftrightarrow \boxed{I = \dfrac{11e^2+1}{8}}$

Exercice 4

On pose $I_0 = \int_1^e xdx$ et $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$ pour tout n entier non nul.

1) $I_0 = \int_1^e xdx = \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_1^e = \dfrac{e^2-1}{2}$.

$I_1 = \int_1^e x(\ln x)dx$, On utilise une intégration par parties:

On pose : $u'(x) = x$ et $v(x) = \ln x$, d'où $u(x) = \dfrac{x^2}{2}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x}$

$I_1 = \int_1^e x(\ln x)dx = [u\times v]_1^e - \int_1^e u\times v' dx = \left[\dfrac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \dfrac{x^2}{2}\times\dfrac{1}{x}dx = \left[\dfrac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \dfrac{x}{2}dx$

Soit, $I_1 = \left[\dfrac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \left[\dfrac{x^2}{4}\right]_1^e \Leftrightarrow I_1 = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{e^2}{4} + \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{I_1 = \dfrac{e^2+1}{4}}$

2) $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx \Leftrightarrow I_{n+1} = \int_1^e x(\ln x)^{n+1}dx$

En effectuant une intégration par parties sur I_{n+1} :

On pose : $u'(x) = x$ et $v(x) = (\ln x)^{n+1}$, d'où $u(x) = \dfrac{x^2}{2}$ et $v'(x) = (n+1)\dfrac{1}{x}(\ln x)^n$

$I_{n+1} = \int_1^e x(\ln x)^{n+1}dx = [u\times v]_1^e - \int_1^e u\times v' dx \Leftrightarrow I_{n+1} = \left[\dfrac{x^2}{2}\times(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \dfrac{x^2}{2}\times(n+1)\dfrac{1}{x}(\ln x)^n dx$

$I_{n+1} = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{n+1}{2}\int_1^e x(\ln x)^n dx \Leftrightarrow I_{n+1} = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{n+1}{2}I_n$,ainsi on a $\boxed{2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2}$

Pour $n=1$ on a : $2I_2 + 2I_1 = e^2 \Leftrightarrow I_2 = \dfrac{e^2}{2} - I_1 \Leftrightarrow I_2 = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{e^2+1}{4} \Leftrightarrow \boxed{I_2 = \dfrac{e^2-1}{4}}$.

3) $I_{n+1}-I_n=\int_1^e x(\ln x)^{n+1}dx-\int_1^e x(\ln x)^n dx$ en utilisant la linéarité de l'intégrale, on a

$I_{n+1}-I_n=\int_1^e \left(x(\ln x)^{n+1}-x(\ln x)^n\right)dx$ en factorisant par $x(\ln x)^n$, on a

$I_{n+1}-I_n=\int_1^e x(\ln x)^n\left(\ln x-1\right)dx$

Pour tout x de l'intervalle $[1;e]$, $x(\ln x)^n\geq 0$ et $\ln x-1\leq 0$

Donc : $x(\ln x)^n\left(\ln x-1\right)\leq 0$, la positivité de l'intégrale *permet* d'écrire: $\int_1^e x(\ln x)^n\left(\ln x-1\right)dx\leq 0$

D'où, $I_{n+1}-I_n\leq 0\Leftrightarrow\boxed{I_{n+1}\leq I_n}$, on en conclut que la suite (I_n) est décroissante.

Montrons que : $\dfrac{e^2}{n+3}\leq I_n\leq\dfrac{e^2}{n+2}$.

La relation du 2° peut s'écrire : $2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2\Leftrightarrow I_{n+1}=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{n+1}{2}I_n$

Comme $I_{n+1}\leq I_n$, alors $\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{n+1}{2}I_n\leq I_n$ en remplaçant I_{n+1} par sa valeur.

$\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{n+1}{2}I_n\leq I_n\Leftrightarrow\dfrac{e^2}{2}\leq I_n+\dfrac{n+1}{2}I_n\Leftrightarrow\dfrac{e^2}{2}\leq\left(1+\dfrac{n+1}{2}\right)I_n\Leftrightarrow\dfrac{e^2}{2}\leq\dfrac{n+3}{2}I_n$ soit $\boxed{\dfrac{e^2}{n+3}\leq I_n}$.

Pour montrer le deuxième membre de l'inégalité, on utilise le même raisonnement au rang n :
on a $I_{n+1}\leq I_n\Leftrightarrow I_n\leq I_{n-1}$

La relation du 2° peut s'écrire au rang n : $2I_n+nI_{n-1}=e^2\Leftrightarrow I_{n-1}=\dfrac{e^2}{n}-\dfrac{2}{n}I_n$

$I_n\leq I_{n-1}\Leftrightarrow I_n\leq\dfrac{e^2}{n}-\dfrac{2}{n}I_n$, en remplaçant I_{n-1} par sa valeur

$I_n\leq\dfrac{e^2}{n}-\dfrac{2}{n}I_n\Leftrightarrow I_n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\leq\dfrac{e^2}{n}$, d'oùaprès simplification: $\boxed{I_n\leq\dfrac{e^2}{n+2}}$

En grouppant les deux inégalités on obtient: $\boxed{\dfrac{e^2}{n+3}\leq I_n\leq\dfrac{e^2}{n+2}}$

4) $\lim\dfrac{e^2}{n+3}=\lim\dfrac{e^2}{n+2}=0$, d'après le théorème des gendarmes, on a: $\boxed{\lim I_n=0}$.
La suite (I_n) converge vers 0.

$\dfrac{e^2}{n+3}\leq I_n\leq\dfrac{e^2}{n+2}\Leftrightarrow\dfrac{n\times e^2}{n+3}\leq n\times I_n\leq\dfrac{n\times e^2}{n+2}$

$\lim\dfrac{n\times e^2}{n+3}=\lim\dfrac{n\times e^2}{n+2}=\lim\dfrac{n\times e^2}{n}=e^2$, d'après le théorème des gendarmes, on a: $\boxed{\lim nI_n=e^2}$
La suite (nI_n) converge vers e^2.

Exercice 7

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

1)a) On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par: $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

f est dérivable comme composée de fonctions dérivables et :

$$f'(x) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}.$$

D'où, $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0)$. soit $\boxed{u_0 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$.

b) $u_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}}dx = \left[\sqrt{h(x)}\right]_0^1 = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1$ .soit $\boxed{u_1 = \sqrt{2}-1}$

2)a)Pour tout entier naturel $n \geq 1$: $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}dx - \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{\sqrt{1+x^2}}dx \quad \text{d'après la linéarité des intégrales.}$$

Pour tout réel $x \in [0;1]$, $\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$ et $1-x \leq 0$, donc $\frac{x^n(1-x)}{\sqrt{1+x^2}} \leq 0$.

Par passage à l'intégral (positivité de l'intégrale ou conservation de l'ordre), on en déduit que:

$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{\sqrt{1+x^2}}dx \leq 0$, la suite (u_n) est donc décroissante.

$\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx \geq 0$. La suite (u_n) est minorée par 0.

(u_n) est minorée et décroissante, elle est donc convergente.

b) Pour tout réel $x \in [0;1]$, on a: $0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1+x^2 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$.

En prenant l'inverse on a: $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$, en multipliant par x^n qui est positif, on obtient:

$\frac{x^n}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$, le passage à l'intégral donne: $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}}dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx \leq \int_0^1 x^n dx$

d'où: $\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq u_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}}$ (1).

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

3)a) Pour tout entier naturel $n \geq 3$, on pose: $I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$.

on a $u_n + u_{n-2} = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx + \int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{x^{n-2}(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{x^2+1}dx$ (car $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$).

Donc on a bien $\boxed{u_n + u_{n-2} = I_n}$.

En utilisant une intégration par parties:

$I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx = \int_0^1 v'(x) \times w(x)dx$ en posant : $v'(x) = x^{n-2}$ $\quad v(x) = \frac{x^{n-1}}{n-1}$

$w(x) = \sqrt{1+x^2} \quad w'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

D'où: $I_n = [v(x) \times w(x)]_0^1 - \int_0^1 v(x) \times w'(x)dx$,

soit $I_n = \left[\sqrt{1+x^2} \times \frac{x^{n-1}}{n-1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n-1} \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$I_n = \frac{\sqrt{2}}{n-1} - \frac{1}{n-1}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$ car: $\frac{x^{n-1}}{n-1} \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^n}{(n-1)\sqrt{1+x^2}}$

Donc finalement on a: $\boxed{I_n = \frac{\sqrt{2}}{n-1} - \frac{1}{n-1}u_n}$.

comme $u_n + u_{n-2} = I_n$, en remplaçant l'expression de I_n,

on obtient après simplification: $\boxed{nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}}$.

b) La suite (un) est décroissante, donc on a :

$u_n \leq u_{n-2} \Leftrightarrow (n-1)u_n \leq (n-1)u_{n-2}$ en multipliant par $(n-1)$

$\Leftrightarrow nu_n + (n-1)u_n \leq nu_n + (n-1)u_{n-2}$ en ajoutant nu_n

$\Leftrightarrow nu_n + (n-1)u_n \leq \sqrt{2}$ puisque $nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$

ainsi on a: $\boxed{(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}}$ (2)

c) La relation (2) donne $(2n-1)u_n \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n-1}$ $\quad 2n-1 > 0$

d'où en utilisant la relation (1) $\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{\sqrt{2}}{2n-1}$

on a l'encadrement: $\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leq u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n-1}$ et en multipliant par n, $\boxed{\frac{n}{\sqrt{2}(n+1)} \leq nu_n \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{n\sqrt{2}}{2n-1}}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{2}(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n\sqrt{2}}{2n-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (en utilisant la limite du quotient de deux polynômes).

Le théorème des gendarmes permet de conclure que: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} nu_n = \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

La suite (nu_n) converge vers $\frac{1}{\sqrt{2}}$.