Mathématiques http://afimath.jimdo.com/	ARITHMETIQUE	*Classe :* $4^{éme}$*inf* *Prof* afif ben ismail

Exercice 1

Dans une division euclidienne entre entiers naturels quels peuvent être le diviseur et le quotient lorsque le dividende est 320 et le reste 39 ?

Exercice 2

Quel est le reste de la division par 7 du nombre $(32)^{45}$

Exercice 3

1) Déterminer les restes de la division de 5^p par 13 pour p entier naturel.
2) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, le nombre

$N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Exercice 4

On considère l'équation (E) : $36x - 25y = 5$, (x, y) Z^2.

1) Déterminez deux entiers relatifs u et v tels que $36u + 25v = 1$.
2) Donnez alors une solution particulière de (E).
3) Quel est l'ensemble des solutions de (E) ?
4) (x , y) étant une solution particulière de (E), on appelle d le PGCD de x et y.

Quelles sont les valeurs possibles de d?

Quelles sont les solutions (x , y) de (E) telles que x et y soient premiers entre eux?

Exercice 5

(E) est l'équation dans $\mathbf{Z}^2$: $36x - 49y = 13$.

a) Déterminez l'ensemble des solutions de (E).
b) Peut-on trouver un couple (x , y) dans **Z** tel que (x^2 , y^2) soit solution de (E) ?
c) Peut-on trouver x $\in$ **Z** tel que (x , x) soit solution de (E) ?

Correction

Exercice 1

Ona$320=q\times b+39 \Leftrightarrow q\times b=320-39=281$. Cherchons les diviseurs de 281 ;sont 1 et 281. Ce sont les seules valeurs possibles de q et b.

Exercice 2

Le reste de 32 dans la division par 7 est 4 ; 4^2 donne 2, 4^3 donne 8, soit 1 ; comme $45 = 15\times3$, on a :

$32^{45}\equiv4^{45}[7]\equiv(4^3)^{15}\,[7]\equiv1^{15}[7]\equiv1[7]$

Exercice 3

1) $p=0:1$, $p=1:5$, $p=2:-1$ ou 12, $p=3:-5$ ou 8, $p=4:1$ donc

pour $p=4k$ le reste est 1,

pour $p=4k+1$ le reste est 5,

pour $p=4k+2$ le reste est 12 ou -1,

pour $p=4k+3$ le reste est 8 ou -5.

2)$N\equiv(31^{4n+1}+18^{4n-1})[13]\equiv(5^{4n+1}+5^{4n-1})[13]\equiv(5+8$à$[13]\equiv0[13]$

On a donc la première solution pour $k=1$, ce qui donne la solution (514, 117).

Exercice 4

1)On applique l'Algorithme d'Euclide.
$36=1\times25+11$, $25=2\times11+3$, $11=3\times3+2$, $3=1\times2+1$.
D'où
$11=(36-25)$, $3=(25-2\times11)=25-2\times(36-25)=3\times25-2\times36$
$2=11-3\times3=(36-25)-3\times(3\times25-2\times36)=7\times36-10\times25$
$1=3-1\times2=(3\times25-2\times36)-(7\times36-10\times25)=13\times25-9\times36$
On a donc la relation : $36u+25v=1$ avec $u=-9$ et $v=13$.

2)En solution particulière de (E) est alors : $xo=5\times u$, $yo=-5\times v$
ou encore ($xo=-45$, $yo=-65$)
On peut aussi voir directement que (5 , 7) est une solution de (E)
3)L'ensemble des solutions de (E) est donc l'ensembles des couples ($x=-45+25k$, $-65+36k$)
où k est quelconque dans **Z**.
C'est aussi l'ensemble des couples ($5+25k$, $7+36k$).

4) Dire que d est le PGCD de x et y revient à dire qu'il existe k et k' premiers entre eux tels que:$x=kd$ et $y=k'd$.
Si de plus (x , y) est solution , on a : $36kd-25k'd=5$ ou encore $d(36k-25k')=5$.
Or , 5 est premier. Cette dernière égalité montre alors que $d=1$ ou $d=5$.

x et y sont premiers entre eux si et seulement si $d=1$.
D'après le résultat précédent, comme $d=1$ ou 5, on peut dire que x et y solutions et (E) et premiers entre eux si et seulement si ils ne sont pas tous les deux divisibles par 5.

Or, les solutions de (E) sont $x=-45+25k$ et $y=-65+36k$. avec $k\in$ **Z.**
Comme x est divisible par 5 pour toute valeur k, on peut dire que x et y sont premiers entre eux si et seulement si y n'est pas divisible par 5.

Or, $-65\equiv0$ [5] et $36\equiv1$ [5] donc pour tout k dans **Z**, on a : $-65+36k\equiv k$ [5].
y est donc non-multiple de 5 si et seulement si $k\not\equiv0$ [5].
Les solutions '(x , y) de (E) telles que x et y soient premiers entre eux sont donc les solutions ($-45+25k$, $-65+36k$) telles que $k\equiv0$ [5].

On peut aussi utiliser la forme des solutions de (E) , ($x=5+25k$, $y=7+36k$).
(x , y) est solution de (E) avec x et y premiers entre eux si et seulement
si y n'est pas divisible par 5 ou encore si $7+36k$ n'est pas congru à 0 modulo 5.

Or $7 + 36k \equiv 2 + k$ [5].
y n'est donc pas divisible par 5 si et seulement si $k \not\equiv 3 [5]$.

Les solutions '(x , y) de (E) telles que x et y soient premiers entre eux sont donc les solutions $(5 + 25ki , 7 + 36k)$ telles que $k \not\equiv 3 [5]$.

Exercice 5

1) On peut remarquer qu'une solution particulière de (E) est $(x = -1 , y = -1)$.
L'ensemble des solutions de (E) est donc formé des couples
$(x = -1 + 49k , -1 + 36k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

2) Dire que (x^2 , y^2) est solution de (E) revient à dire que l'on a : $36x^2 - 49y^2 = 13$.
Or $36x^2 - 49y^2 = (6x - 7y)(6x + 7y)$.
On obtient alors l'égalité : $(6x - 7y)(6x + 7y) = 13$.
Comme 13 est premier, ces seuls diviseurs sont : 1 , -1 , 13 et -13.
On peut alors dire que (x^2 , y^2) est solution de (E) si et seulement si :

$(6x - 7y = 1$ et $6x + 7y = 13)$ ou $(6x - 7y = -1$ et $6x + 7y = -13)$

Si $(6x - 7y = 1$ et $6x + 7y = 13)$ alors $12x = 14$. Impossible car x est entier.
Si $(6x - 7y = -1$ et $6x + 7y = -13)$ alors $12x = -14$. Impossible aussi.

Conclusion: Il n'existe aucun couple de la forme (x^2 , y^2) solution de (E).

3) Dire que (x ,x) est solution de (E) revient à dire que $-13x = 13$.
Donc la seule valeur possible pour x est : $x = -1$.