Problème 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$. On considère la fonction *f*, définie sur l'intervalle

$]0\,;\,+\infty\,[$ par : $f(x) = -3 - \text{Log}\,x + 2\,(\text{Log}\,x)^2$.

On note (C) sa courbe représentative.

Partie A - Étude de la fonction *f* et tracé de la courbe (C)

1. a. Résoudre dans $]0\,;\,+\infty\,[$ l'équation $f(x) = 0$. (On pourra poser $\text{Log}\,x = X$).

b. Résoudre dans $]0\,;\,+\infty\,[$ l'inéquation $f(x) > 0$.

2. a. Déterminer les limites de *f* en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$.

c. Étudier le sens de variation de *f* et dresser son tableau de variations.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $e^{\frac{5}{4}}$.

4. Tracer la courbe (C) et la droite (T). (Unité graphique : 2 cm sur chaque axe.)

Partie B - Calcul d'une aire

1. Démontrer que la fonction h , définie par h(x)= x. Logx - x est une primitive de la fonction log sur $]0\,;+\infty\,[$.

2. On pose $I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} \text{Log}\,x\,dx$ et $I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} (\text{Log}\,x)^2\,dx$.

a. Calculer I_1 .

b. Montrer que $I_2 = \frac{5}{4}e^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{e}$.

c. Calculer $I = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} f(x)\,dx$. En déduire l'aire, en unités d'aire, de l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que $\frac{1}{e} \leq x \leq e^{\frac{3}{2}}$ et $f(x) \leq y \leq 0$.

Problème 2

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = -2x^2 - 1 + \ln x$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$. Étudier son signe sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. Dresser le tableau de variations de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. En déduire que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = -x + 1 - \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. a. Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

b. Calculer la limite de f en $+\infty$.

c. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -x+1$ est asymptote à la courbe C.

d. Étudier la position relative de C et Δ sur $]0\,;\,+\infty[$.

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

b. Vérifier que pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.

c. Déduire de la partie A. le tableau de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

d. Calculer $f(1)$. En déduire le signe de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

3. Dans le plan muni du repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, tracer la droite Δ et la courbe C.

Partie C

1. Vérifier que la fonction F définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{4}(\ln x)^2$ est une primitive de f.

2. Calculer l'intégrale $I = \int_1^e f(x)\,dx$ (on donnera la valeur exacte).

3. a. Hachurer sur le graphique la partie E du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

b. Déduire de la question 2. de la partie C. la valeur exacte de l'aire S de E en cm^2, puis en donner la valeur arrondie en cm^2, au mm^2 près.

Problème 3

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2\,\text{Log}\,x$

1. Étudier le sens de variation de g.

2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\ ;+\infty[$.

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1+\text{Log}\,x}{x}$.

On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2cm).

1. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (C).

   c) Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ) sur $]0\ ;+\infty[$.
   Montrer en particulier que (Δ) coupe (C) en un point A que l'on déterminera.

3. Dresser le tableau de variation de f.

4. Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe (C) où la tangente (T) à (C) est parallèle à (Δ). Préciser les coordonnées de B.

5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α.
   Justifier l'encadrement : $0{,}34 < \alpha < 0{,}35$

6. Tracer la courbe (C) et les droites (Δ) et (T).

Partie III

On considère la suite numérique (x_n) définie par $x_n = e^{\frac{n-2}{2}}$ pour tout nombre entier naturel n.

1. a) Montrer que (x_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

   b) Montrer que (x_n) est une suite croissante.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $a_n = 4\displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right)dx$.

   a) Donner une interprétation géométrique de a_n.

   b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $a_n = \dfrac{2n+1}{2}$.

   En déduire que (a_n) est une suite arithmétique.

Correction

Partie A $f(x)=-3-\ln x+2(\ln x)^2$.

1. a. $f(x)=-3-\ln x+2(\ln x)^2=0$: on pose $X=\ln x$ d'où $-3-X+2X^2=0 \Rightarrow X_1=-1, X_2=\dfrac{3}{2}$ d'où $x=e^{-1}$ ou $x=e^{\frac{3}{2}}$.

b. $-3-X+2X^2>0 \Leftrightarrow X=\ln x\in\left]-\infty\,;-1\right[\cup\left]\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[\Leftrightarrow x\in\left]0\,;e^{-1}\right[\cup\left]e^{\frac{3}{2}}\,;+\infty\right[$.

2. a. Toujours avec $X=\ln x$, lorsque x tend vers 0, X tend vers $-\infty$ donc $-3-X+2X^2$ se comporte comme $2X^2$ qui tend vers $+\infty$; lorsque x tend vers $+\infty$, X tend vers $+\infty$ donc $-3-X+2X^2$ se comporte comme $2X^2$ qui tend vers $+\infty$.

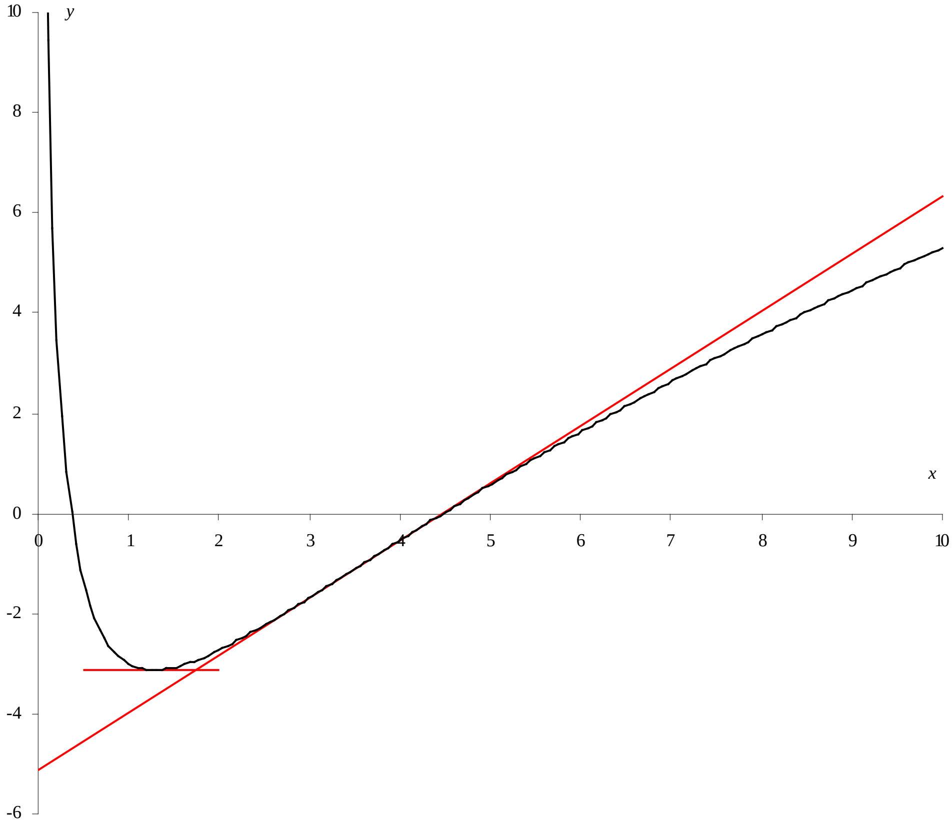
b. $f'(x)=-\dfrac{1}{x}+2\times 2\times\dfrac{1}{x}\times\ln x=\dfrac{-1+4\ln x}{x}$.

c. f est croissante lorsque $4\ln x-1>0 \Leftrightarrow \ln x>\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x>e^{\frac{1}{4}}$. $f\left(e^{1/4}\right)=-3-\dfrac{1}{4}+2\dfrac{1}{16}=-\dfrac{25}{8}$.

x	0		$e^{\frac{1}{4}}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{-25}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. $f\left(e^{\frac{5}{4}}\right)=-3-\dfrac{5}{4}+2\dfrac{25}{16}=\dfrac{-24-10+25}{8}=-\dfrac{9}{8}$; $f'\left(\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{-1+4\dfrac{5}{4}}{e^{5/4}}=4e^{-5/4}$; $y=4e^{-5/4}\left(x-e^{5/4}\right)-\dfrac{9}{8}$.

4.



Partie B

1. Restitution organisée des connaissances : on fait une intégration par parties en posant $u'=1$ et $v=\ln x$ d'où on tire $\int \ln x dx = x\ln x - \int x\times\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int 1dx = x\ln x - x$.

2. On pose $I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} \ln x dx$ et $I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} (\ln x)^2 dx$.

a. $I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} \ln x dx = [x\ln x - x]_{1/e}^{e^{3/2}} = e^{\frac{3}{2}}\frac{3}{2} - e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{e}(-1) + \frac{1}{e} = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{e}$.

b. $I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} (\ln x)^2 dx$: intégration par parties en posant $u'=1$ et $v=(\ln x)^2$, soit $u=x$, $v'=2\frac{1}{x}\ln x$,

soit $I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} (\ln x)^2 dx = \left[x(\ln x)^2\right]_{1/e}^{e^{3/2}} - \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} 2\ln x dx = e^{\frac{3}{2}}\frac{9}{4} - \frac{1}{e} - 2I_1 = \frac{9}{4}e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{e} - e^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{e} = \frac{5}{4}e^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{e}$.

c. $I=\int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} -3-\ln x+2(\ln x)^2\,dx=-3\left(e^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{e}\right)-I_1+2I_2=-3e^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{e}-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{e}\right)+2\left(\frac{5}{4}e^{\frac{3}{2}}-\frac{5}{e}\right)=-e^{\frac{3}{2}}-\frac{9}{e}$.

Comme on a pu le remarquer les bornes $\frac{1}{e}\le x\le e^{\frac{3}{2}}$ correspondent précisément aux valeurs de x pour lesquelles f s'annule. La valeur de I est négative car f est négative sur cet intervalle ; on a donc l'aire, en unités d'aire, égale à $-I=e^{\frac{3}{2}}+\frac{9}{e}\approx 7,8$.

Problème 2

Partie A

1. $g(x)=-2x^2-1+\ln x$, $g'(x)=-4x+\frac{1}{x}=\frac{1-4x^2}{x}=\frac{(1-2x)(1+2x)}{x}$. Sur $]0\ ;\ +\infty[$ seul le terme $1-2x$ change de signe : positif avant $\frac{1}{2}$, négatif après $\frac{1}{2}$.

2. $x\left(-2x+\frac{\ln x}{x}\right)-1$ tend vers $-\infty$,lorsque x tend vers $+\infty$

x	0	$1/2$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$-$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$-\frac{3}{2}-\ln 2$	↘ $-\infty$

3. Le maximum de g est $-\frac{3}{2}-\ln 2$ donc $g(x)\le g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}-\ln 2<0$.

Partie B

1. a. $f(x)=-x+1-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}$: $\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\ln x$; or en 0 $\ln x$ tend vers $-\infty$ et $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$. Conclusion, f tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 ; la droite $x = 0$ est asymptote de C.

b. On sait que $\frac{\ln x}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ donc f tend vers $-\infty$ car $-x+1$ tend vers $-\infty$.

c. $f(x)-(-x+1)=-x+1-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}+x-1=-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ donc la droite Δ $y=-x+1$ est asymptote à la courbe C.

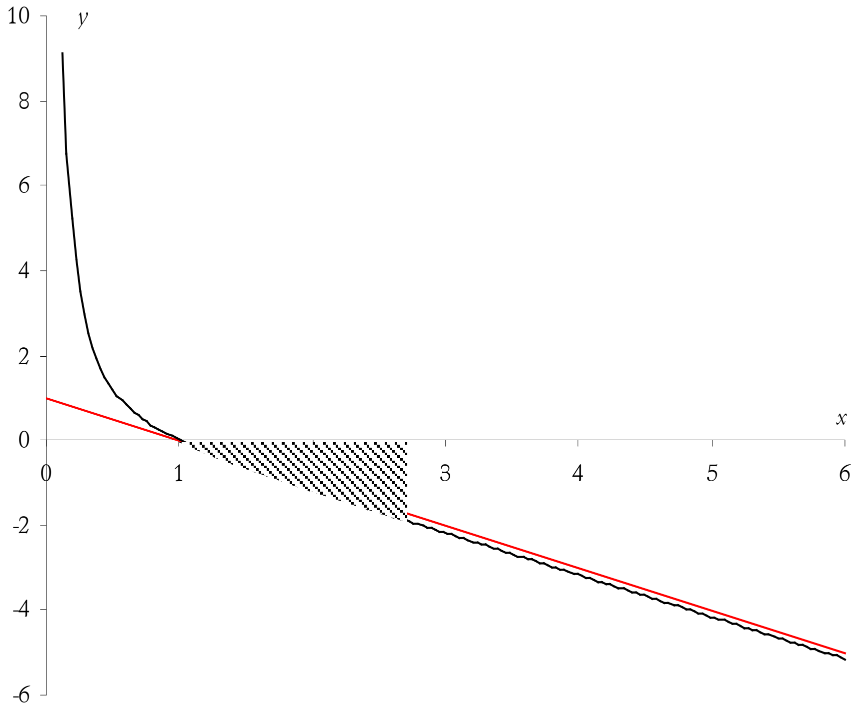
d. Lorsque $x>1$, $-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}<0$ car $\ln x>0$. Donc sur $[1;+\infty[$ C est au-dessus de Δ ; sur $]0;1]$ C est en dessous de Δ.

2. a. b. c. $f'(x)=-1-\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{-2x^2-1+\ln x}{2x^2}=\frac{g(x)}{2x^2}$. Donc f' est négative et f décroissante.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

d. $f(1)=0$: lorsque x est inférieur à 1, $f(x)>f(1)=0$ car f est strictement décroissante sur IR . Lorsque x est supérieur à 1, $f(x)<f(1)=0$.

3.



Partie C

1. $F'(x) = -\frac{1}{2}(2x) + 1 - \frac{1}{4}\left(2\frac{1}{x}\ln x\right) = -x + 1 - \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x} = f(x)$: F est une primitive de f.

2. $I = \int_1^e f(x)\,dx = F(e) - F(1) = \left[-\frac{1}{2}e^2 + e - \frac{1}{4}(\ln e)^2\right] - \left[-\frac{1}{2}1^2 + 1 - \frac{1}{4}(\ln 1)^2\right] = -\frac{1}{2}e^2 + e - \frac{3}{4} \approx -1{,}726$.

3. b. L'unité d'aire est $1\text{ cm} \times 2\text{ cm} = 2\text{ cm}^2$; on prend la valeur absolue de l'intégrale multipliée par l'unité d'aire, ce qui nous fait $e^2 - 2e + \frac{3}{2}$, soit environ 3,45 cm^2 au mm^2 près.

Problème 3

Partie I g est la fonction numérique g définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2\,\mathrm{Log}\,x$

1°) g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et on a $g'(x) = 2x - 2\,x\dfrac{1}{x} = 2\left(x - \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{2(x^2-1)}{x}$

$$= \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

Comme $x \in]0\,;+\infty[$, on a $x > 0$ et $x + 1 > 0$, donc $g'(x)$ est du signe de $(x - 1)$.
On en déduit que $g'(x) < 0$ pour $x \in]0\,;1[$ et $g'(x) > 0$ pour $x \in]1\,;+\infty[$
Donc : g est strictement décroissante sur $]0\,;1]$ et strictement croissante sur $[1\,;+\infty[$.

2°) On a $g(1) = 1^2 - 2\,\mathrm{Log}\,1 = 1$. g admet un minimum absolu en 1 qui vaut 1 donc pour tout $x > 0$, $g(x) \geq 1$. Donc : pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$.

Partie II f est la fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1+\mathrm{Log}\,x}{x}$.

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2cm).

1°) On peut écrire $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1+\mathrm{Log}\,x}{x} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}.(1 + \mathrm{Log}\,x)$

On sait que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \mathrm{Log}\,x = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} 1 + \mathrm{Log}\,x = -\infty$

d'autre part $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x} \times (1 + \mathrm{Log}\,x) = -\infty$

De plus $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{x}{2} = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} \times (1 + \mathrm{Log}\,x) = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = -\infty}$.

On peut en déduire que :

$\boxed{\text{la courbe (C) a pour asymptote verticale la droite d'équation } x = 0 \text{ (Axe Oy)}}$

2°) a) On peut écrire $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\mathrm{Log}\,x}{x}$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{Log}\,x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{\mathrm{Log}\,x}{x} = +\infty$ c'est-à-dire $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

b) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \dfrac{x}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} + \dfrac{\mathrm{Log}\,x}{x} = 0$

Donc : $\boxed{\text{la droite } (\Delta) \text{ d'équation } y = \dfrac{x}{2} \text{ est asymptote à la courbe (C)}}$.

c) On a $f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1+\text{Log}\,x}{x}$.

Donc : $f(x) = \frac{x}{2} \Leftrightarrow 1 + \text{Log}\,x = 0 \Leftrightarrow \text{Log}\,x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$

Donc : $\boxed{(\Delta) \text{ coupe } (\mathcal{C}) \text{ au point A d'ascisse } e^{-1} \text{ et d'ordonnée } \frac{e^{-1}}{2}}$

$x \in]0\,;+\infty[$, donc $f(x) - \frac{x}{2}$ est du signe de $1 + \text{Log}\,x$. La fonction Log étant strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$,

on a alors : $1 + \text{Log}\,x > 0 \Leftrightarrow \text{Log}\,x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$

et $1 + \text{Log}\,x < 0 \Leftrightarrow \text{Log}\,x < -1 \Leftrightarrow x < e^{-1}$

On en déduit que $f(x) > \frac{x}{2}$ pour $x > e^{-1}$ et $f(x) < \frac{x}{2}$ pour $x < e^{-1}$

3°) Pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ on a $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\text{Log}\,x}{x}$

f est donc la somme et le quotient de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$

et on a : $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{\text{Log}\,x}{x^2} = \frac{x^2 - 2\text{Log}\,x}{2x^2}$

Donc $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. D'après la partie I, on sait que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$,

donc $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0\,;+\infty[$.
On en déduit que f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
On peut donner le tableau de variation de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4°) La tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse b a pour coefficient directeur $f'(b)$.
Cette tangente est parallèle à (Δ) si et seulement si elle a le même coefficient directeur que (Δ).

$f'(b) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{b^2 - 2\text{Log}\,b}{2b^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b^2 - 2\text{Log}\,b = b^2 \Leftrightarrow \text{Log}\,b = 0 \Leftrightarrow b = 1$

$\boxed{\text{Il existe donc un point B et un seul où la tangente (T) à la courbe } (\mathcal{C}) \text{ est parallèle à } (\Delta)}$.

$\boxed{\text{B a pour abscisse 1 et pour ordonnée } f(1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}}$.

5°) f est une fonction continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Donc pour tout réel k dans l'intervalle $\left]\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)\,;\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique.

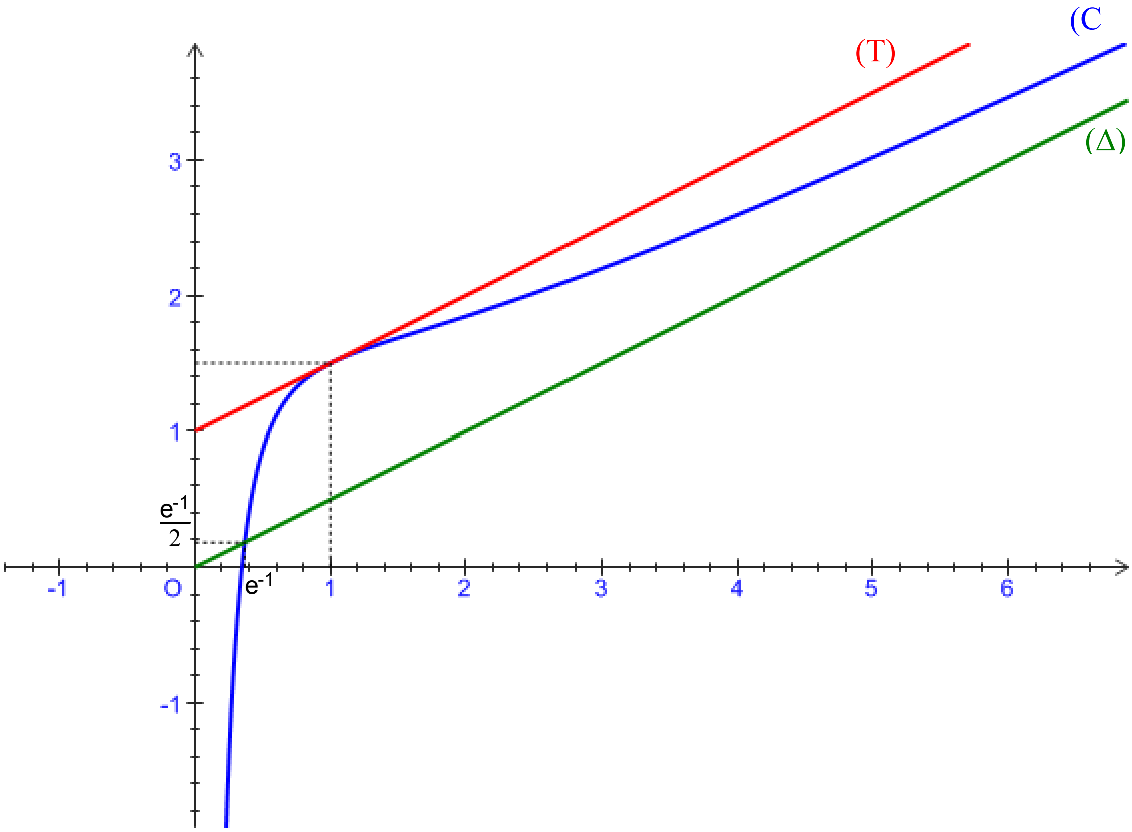
Comme $0 \in \left]\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)\,;\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[= \mathbb{R}$, on en déduit que

$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ a une solution unique } \alpha}$.

La calculatrice donne $f(0,34) \approx -0,06$ donc $f(0,34) < 0$ et $f(0,35) \approx 0,03$ donc $f(0,35) > 0$

On en déduit que $f(0,34) < f(\alpha) < f(0,35)$ et comme f est strictement croissante : $\boxed{0,34 < \alpha < 0,35}$.

6°)



Partie III La suite numérique (x_n) est définie par $x_n = e^{\frac{n-2}{2}}$ pour tout nombre entier naturel n.

1°) a) On peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} = e^{\frac{n+1-2}{2}} = e^{\frac{n-2}{2}+\frac{1}{2}} = e^{\frac{n-2}{2}} \times e^{\frac{1}{2}} = x_n \times e^{\frac{1}{2}}$

On en déduit que : $\boxed{(x_n) \text{ est une suite géométrique de raison } e^{\frac{1}{2}}}$.

Son premier terme est $x_0 = e^{\frac{0-2}{2}}$ donc $\boxed{x_0 = e^{-1}}$.

b) (x_n) est une suite géométrique de premier terme positif et de raison positive, donc (x_n) est une suite à termes positifs.

On a $e^{\frac{1}{2}} > 1$ donc $x_n \times e^{\frac{1}{2}} > x_n$ c'est-à-dire $x_{n+1} > x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc : $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est une suite croissante}}$.

2°) Pour tout entier naturel n, on a : $a_n = 4\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) dx$.

a) D'après la partie II, on sait que $\left(f(x) - \frac{x}{2}\right) > 0$ pour $x > e^{-1}$

Comme la suite (x_n) est croissante on a $e^{-1} < x_n < x_{n+1}$.

Donc $\int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) dx$ est l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathcal{C}$), la droite (Δ) et les droites d'équations $x = x_n$ et $x = x_{n+1}$.

L'unité du repère étant 2cm, l'unité d'aire est $4cm^2$.

$a_n = 4 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) dx$ est l'aire, en cm^2, de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathcal{C}$), la droite (Δ) et les droites d'équation $x = x_n$ et $x = x_{n+1}$.

b) $a_n = 4 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right) dx = 4 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(\frac{1 + \text{Log}\, x}{x}\right) dx = 4 \int_{x_n}^{x_{n+1}} \left(\frac{1}{x} + \frac{\text{Log}\, x}{x}\right) dx$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour primitive $x \mapsto \text{Log}\, x$.

D'autre part $\frac{1}{x} \times \text{Log}\, x$ est de la forme $u'(x) \times u(x)$, donc $\frac{1}{x} \times \text{Log}\, x$ a pour primitive $\frac{1}{2} u(x)^2 = \frac{1}{2} (\text{Log}\, x)^2$.

On a donc : $a_n = \Big[\, 4\text{Log}\, x + 2\, (\text{Log}\, x)^2 \,\Big]_{x_n}^{x_{n+1}} = 4\, \text{Log}\, x_{n+1} + 2\, (\text{Log}\, x_{n+1})^2 - 4\text{Log}\, x_n - 2\, (\text{Log}\, x_n)^2$

Donc $a_n = 4\text{Log}\, e^{\frac{n-1}{2}} + 2\left(\text{Log}\, e^{\frac{n-1}{2}}\right)^2 - 4\text{Log}\, e^{\frac{n-2}{2}} - 2\left(\text{Log}\, e^{\frac{n-2}{2}}\right)^2$

$a_n = 4 \times \frac{n-1}{2} + 2\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 - 4 \times \frac{n-2}{2} - 2\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$

$a_n = 2n - 2 + \frac{n^2 - 2n + 1}{2} - 2n + 4 - \frac{n^2 - 4n + 4}{2} = 2 + \frac{n^2 - 2n + 1 - n^2 + 4n - 4}{2}$

$a_n = 2 + \frac{2n - 3}{2} = \frac{4 + 2n - 3}{2}$ donc $\boxed{a_n = \frac{2n+1}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$.

On en déduit que : $a_n = n + \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $a_{n+1} = n + 1 + \frac{1}{2} = n + \frac{1}{2} + 1 = a_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit que : $\boxed{(a_n) \text{ est une suite arithmétique de raison } 1}$.