Exercice 1:

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On désigne par I le point d'affixe $z_I = 1$, par A le point d'affixe $z_A = 1 - 2\,i$, par B le point d'affixe $-2 + 2\,i$ et par $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [AB].
On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1° Déterminer le centre Ω du cercle $(\mathscr{C})$ et calculer son rayon.

2° Soit D le point d'affixe $z_D = \dfrac{3 + 9\,i}{4 + 2\,i}$
Ecrire z_D sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle $(\mathscr{C})$.

3° Sur le cercle $(\mathscr{C})$, on considère le point E, d'affixe z_E, tel qu'une mesure en radians de $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E})$ est $\dfrac{\pi}{4}$

a) Préciser le module et un argument de $z_E + \dfrac{1}{2}$.

b) En déduire que $z_E = \dfrac{5\sqrt{2} - 2}{4} + \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\,i$

4° Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M′ d'affixe z′ tel que :

$$z' + \frac{1}{2} = e^{i\pi/4}\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

a) Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.
b) Soit K le point d'affixe $z_K = 2$. Déterminer par le calcul l'image de K par r.
Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat ?

Exercice 2

On désigne par n un entier supérieur ou égal à 2 et on considère les fonctions, notées f_n, qui sont définies pour x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f_n(x) = \dfrac{1 + n\ln(x)}{x^2}$

PARTIE A

1. Calculer $f_n'(x)$ et montrer que l'on peut écrire le résultat sous la forme d'un quotient dont le numérateur est :
$$n - 2 - 2n\ln(x).$$

2. Résoudre l'équation $f_n'(x) = 0$. Etudier le signe de $f_n'(x)$

3. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$

4. Etablir le tableau de variation de la fonction f_n et calculer sa valeur maximale en fonction de n.

PARTIE B

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm). On note $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n dans ce repère.

1. Tracer $(\mathscr{C}_2)$et $(\mathscr{C}_3)$.

2. a) Calculer $f_{n+1} - f_n$. Cette différence est-elle dépendante de l'entier n ?
   b) Expliquer comment il est possible de construire point par point la courbe $(\mathscr{C}_n)$ à partir de $(\mathscr{C}_2)$ et$(\mathscr{C}_3)$.

PARTIE C

1. Calculer, en intégrant par parties, l'intégrale : $I = \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

2. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine plan limité par les courbes $(\mathscr{C}_n)$et $(\mathscr{C}_{n+1})$ et les droites d'équations x = 1 et x = e.

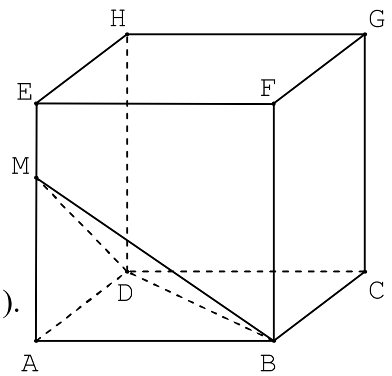
3. On note A_n l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C}_n)$ et les droites d'équations y = 0, x = 1 et x = e.
   a) Calculer A_2.
   b) Déterminer la nature de la suite (A_n) en précisant l'interprétation graphique de sa raison.

<u>Exercice 3</u>

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.
Le nombre a désigne un réel strictement positif.

On considère le point M de la demi-droite [AE] défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}$.

L'espace est muni du repère orthonormé direct $\left(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$.



1. Déterminer le volume du tétraèdre ABDM en fonction de a.

2. Soit K le barycentre du système de points pondérés $(M ; a^2)$, (B ; 1) et (D; 1).
   a) Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BM}$ et de $\overrightarrow{BD}$.
   b) Calculer $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD}$ puis en déduire l'égalité $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$.
   c) Démontrer l'égalité $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
   d) Démontrer que K est l'orthocentre du triangle BDM.

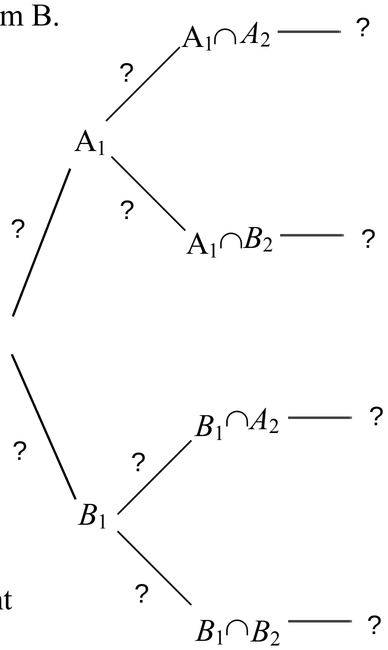
3. Démontrer les égalités $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ et $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$. Qu'en déduit-on pour la droite (AK) ?

4. a) Montrer que le triangle BDM est isocèle et que son aire est égale à $\frac{\sqrt{a^2+2}}{2\,a}$ unité d'aire.
   b) Déterminer le réel a tel que l'aire du triangle BDM soit égale à 1 unité d'aire.
   Déterminer la distance AK dans ce cas.

Exercice 4

Un groupe de vingt-deux personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B.
Le premier samedi, huit personnes vont voir le film A, et les autre vont voir le film B.
Le deuxième samedi, quatre personnes décident de revoir le film A, deux vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.

Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe.
On considère les événements suivants :
A_1 : « la personne interrogée a vu le film A le premier samedi » ;
A_2 : « la personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi » ;
B_1 : « la personne interrogée a vu le film B le premier samedi » ;
B_2 : « la personne interrogée a vu le film B le deuxième samedi ».



1° a) Calculer les probabilités suivantes : $p(A_1)$ et $p(A_2)$.

b) Calculer les probabilités de chacun des événements suivants :
$p_{A_1}(A_2)$, $p_{B_1}(A_2)$ et $p(A_1 \cap A_2)$

c) Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante.
Aucune justification n'est demandée pour cette question.

d) Retrouver à partir de l'arbre pondéré que $p(A_2) = \frac{8}{11}$.

2° Le prix du billet pour le film A est de 4,5 D et de 3 D pour le film B.

On appelle X la variable aléatoire égale au coût total, pour la personne interrogée, des deux séances de cinéma.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Corrigé

$\boxed{\text{Exercice 1}}$ 1° Milieu de [AB] $\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{1-2\,i+(-2+2\,i)}{2}=-\frac{1}{2}$ le centre Ω de (C) est le point d'affixe $-\frac{1}{2}$.

le rayon est égale à : $\frac{|z_B-z_A|}{2}=\frac{|-2+2\,i-(1-2\,i)|}{2}=\frac{|-3+4\,i|}{2}=\frac{\sqrt{9+16}}{2}=\frac{5}{2}$

2° $z_D=\frac{3+9\,i}{4+2\,i}=\frac{(3+9\,i)\,(4-2\,i)}{16+4}=\frac{12-6\,i+36\,i+18}{20}=\frac{30\,i+30}{20}=\boxed{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\,i.}$

$\left|z_D+\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\,i+\frac{1}{2}\right|=\left|2+\frac{3}{2}\,i\right|=\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\frac{5}{2}$ donc $\boxed{D\in(C\ )}$

3° a) $z_E+\frac{1}{2}$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega E}$ on a donc : $\left|z_E+\frac{1}{2}\right|=\frac{5}{2}$ car $E\in\mathscr{C}\left(\Omega,\frac{5}{2}\right)$ et

$\arg\left(z_E+\frac{1}{2}\right)=(\vec{u},\overrightarrow{\Omega E})=(\overrightarrow{\Omega I},\overrightarrow{\Omega E})=\frac{\pi}{4}$. ($\overrightarrow{\Omega I}=\left(1+\frac{1}{2}\right)\vec{u}$ donc $\overrightarrow{\Omega E}$ et $\vec{u}$ colinéaires de même sens)

b) $z_E-z_\Omega=\frac{5}{2}e^{i\pi/4}$ donc $z_E=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{4}+\frac{5\sqrt{2}}{4}\,i=\frac{5\sqrt{2}-2}{4}+\frac{5\sqrt{2}}{4}\,i$

4° a) $z'+\frac{1}{2}=e^{i\pi/4}\left(z+\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow z'-z_\Omega=e^{i\pi/4}\,(z-z_\Omega)$ donc r est la rotation de centre Ω d'angle $\frac{\pi}{4}$

b) $z'+\frac{1}{2}=e^{i\pi/4}\left(z_K+\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow z'=-\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{5\sqrt{2}-2}{4}+\frac{5\sqrt{2}}{4}\,i=z_E$

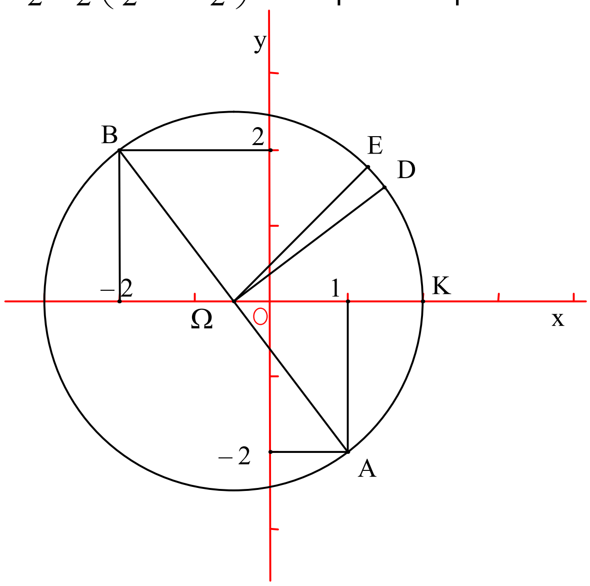
$\left|2+\frac{1}{2}\right|=\frac{5}{2}$ donc $K\in(\mathscr{C})$ et donc K' est aussi un point

de $\mathscr{C}\left(\Omega,\frac{5}{2}\right)$ (r rotation de centre Ω)

De plus $(\overrightarrow{\Omega K'},\overrightarrow{\Omega K})=\frac{\pi}{4}=(\overrightarrow{\Omega K'},\overrightarrow{\Omega I})$ car $\overrightarrow{\Omega K}=\left(2+\frac{1}{2}\right)\vec{u}$,

donc $\overrightarrow{\Omega K}$ est colinéaire de même sens que $\overrightarrow{\Omega I}$

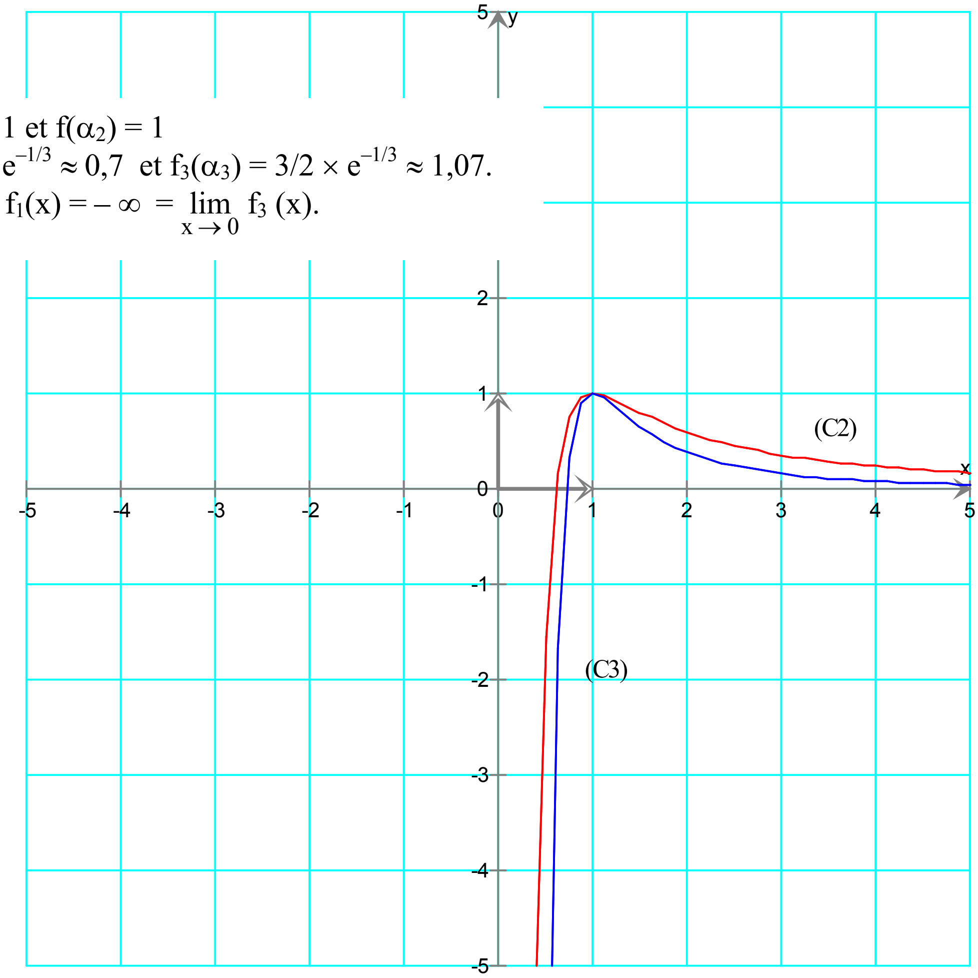
$\left.\begin{array}{l}(\overrightarrow{\Omega K'},\overrightarrow{\Omega I})=\frac{\pi}{4}\\ K'\in(\mathscr{C})\end{array}\right\}$ donc $K'=E$



$\alpha_2 = 1$ et $f(\alpha_2) = 1$

$\alpha_3 = e^{-1/3} \approx 0{,}7$ et $f_3(\alpha_3) = 3/2 \times e^{-1/3} \approx 1{,}07$.

$\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = -\infty = \lim\limits_{x \to 0} f_3(x)$.



Exercice 2

Partie A

$$1° \; f_n'(x) = \frac{\frac{n}{x} \times x^2 - 2x \times (1 + n\ln(x))}{x^4} = \frac{nx - 2x - 2nx\ln(x)}{x^4} = \frac{n - 2 - 2n\ln(x)}{x^3}$$

$$2° \; f_n'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{n - 2 - 2n\ln(x)}{x^3} > 0 \Leftrightarrow n - 2 - 2n\ln(x) > 0 \text{ (car } x > 0)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) < \frac{n-2}{2n} \quad (\text{car } n > 0) \Leftrightarrow x < \exp\left(\frac{n-2}{2n}\right)$$

x	0		α		$+\infty$
f '(x)		+	0	–	

On note $\alpha = \exp\left(\frac{n-2}{2n}\right)$

$$3° \; \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

x	0		α		$+\infty$
signe de f '		+	0	–	
f	$-\infty$	↗	$f_n(\alpha)$	↘	0

$$4° \; f_n(\alpha) = \frac{1 + n \times \frac{n-2}{2n}}{\left(\exp\left(\frac{n-2}{2n}\right)\right)^2} = \frac{n}{2}\exp\left(\frac{2-n}{n}\right)$$

Partie B

2° a) $f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1 + (n+1)\ln(x)}{x^2} - \frac{1 + n\ln(x)}{x^2} = \frac{1 + n\ln(x) + \ln(x) - 1 - n\ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(x)}{x^2}$ indépendant de n.

La fonction $f_{n+1} - f_n$ est donc indépendant de n.

b) $f_3(x) - f_2(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ et $f_n(x) - f_2(x) = (n-2) \times (f_3(x) - f_2(x))$

Soit x une réel > 0. On note M_2 le point d'abscisse x de ($\mathscr{C}_2$) et M_3 le point d'abscisse x de ($\mathscr{C}_3$)

M_n est le le point d'abscisse x de ($\mathscr{C}_n$) tel que : $\overrightarrow{M_2M_n} = (n-2)\,\overrightarrow{M_2M_3}$

On translate le point M_2 avec la translation de vecteur $(n-2)\,\overrightarrow{M_2M_3}$.

ARTIE C

1° $I = \left[-\frac{1}{x} \times \ln(x)\right]_1^e - \int_1^e -\frac{1}{x} \times \frac{1}{x}\,dx = -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$

2° Pour tout $x \in [1 ; e]$, $\frac{\ln(x)}{x^2} \geq 0$ donc en UA $\mathscr{A} = I = 1 - \frac{2}{e}$

3° Pour tout $x \in [1 ; e]$, $\frac{1 + 2\ln(x)}{x^2} \geq 0$ donc en UA on a :

$$A_2 = \int_1^e \frac{1 + 2\ln(x)}{x^2}\,dx = \int_1^e \frac{1}{x^2}\,dx + 2I = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e + 2I = -\frac{1}{e} + 1 + 2\left(1 - \frac{2}{e}\right) = 3 - \frac{5}{e}$$

b) pour tout entier n supérieur ou égale à 2 f_n est positive sur [1 ; e]

$$A_{n+1} = \int_1^e \frac{1 + (n+1)\ln(x)}{x^2}\,dx = \int_1^e \frac{1 + n\ln(x)}{x^2}\,dx + \int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = A_n + I$$

La suite (A_n) est arithmétique de raison I. I est en UA l'air de la portion du plan limité par les courbes ($\mathscr{C}_1$) et ($\mathscr{C}_2$) et les droites d'équations x = 1 et x = e .

Exercice 3

Dans le repère orthnormé direct $(A , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AE})$, A(0,0,0), B(1,0,0) D(0,1,0) et E(0,0,1)

$M\left(0,0,\frac{1}{a}\right)$ et $K\left(\frac{1}{a^2+2}, \frac{1}{a^2+2}, \frac{a}{a^2+2}\right)$ car $x_K = \frac{a^2 \times 0 + 1 + 0}{a^2+2}$, $y_K = \frac{a^2 \times 0 + 0 + 1}{a^2+2}$ et $z_K = \frac{a^2 \times (1/a) + 0 + 0}{a^2+2}$

$\overrightarrow{BK}\left(\frac{1}{a^2+2} - 1 , \frac{1}{a^2+2}, \frac{a}{a^2+2}\right)$ c'est à dire $\overrightarrow{BK}\left(\frac{-a^2-1}{a^2+2}, \frac{1}{a^2+2}, \frac{a}{a^2+2}\right)$, $\overrightarrow{AM}\left(0 , 0 , \frac{1}{a}\right)$ et $\overrightarrow{AD}$ (0,1,0)

$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BD} = -\frac{a^2-1}{a^2+2} \times 0 + \frac{1}{a^2+2} \times 0 + \frac{1}{a} \times \frac{a}{a^2+2} = \frac{1}{a^2+2}$ et $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{a^2-1}{a^2+2} \times 0 + \frac{1}{a^2+2} \times 1 + \frac{a}{a^2+2} \times 1 = \frac{1}{a^2+2}$

Ou encore $V(ABDM) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DC}\right).\overrightarrow{DM}\right|}{6}$, on a : $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

D'autre part $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{1}{a}\end{pmatrix}$, il en résulte que $\left(\overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DC}\right).\overrightarrow{DM} = \frac{1}{a}$ et par suite $V(ABDM) = \boxed{\frac{1}{6\,a}}$

c) $\overrightarrow{DK}\left(\frac{1}{a^2+2}, \frac{1}{a^2+2} - 1 , \frac{a}{a^2+2}\right)$ donc $\overrightarrow{DK}\left(\frac{1}{a^2+2}, \frac{-a^2-1}{a^2+2} - 1 , \frac{a}{a^2+2}\right)$ et $\overrightarrow{MB}\left(1 , 0 , -\frac{1}{a}\right)$

$\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{1}{a^2+2} \times 1 + \frac{-a^2-1}{a^2+2} \times 0 + \frac{a}{a^2+2} \times \left(-\frac{1}{a}\right) = 0.$

…

3° $\overrightarrow{AK}\left(\frac{1}{a^2+2}, \frac{1}{a^2+2}, \frac{a}{a^2+2}\right)$ et $\overrightarrow{MB}\left(1 , 0 , -\frac{1}{a}\right)$ et $\overrightarrow{MD}\left(0 , 1 , -\frac{1}{a}\right)$

$\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{1}{a^2+2} - \frac{1}{a} \times \frac{a}{a^2+2} = 0$ et $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{1}{a^2+2} - \frac{1}{a} \times \frac{a}{a^2+2} = 0$

….

4° a) Soit I le milieu de [BD]. On a $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ et $M\left(0,0,\frac{1}{a}\right)$ donc $MI^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{a^2+2}{2\,a^2}$

$MI = \sqrt{\frac{a^2+2}{2\,a^2}}$ et $BD = \sqrt{2}$ donc : Aire de $BDM = \frac{1}{2} BD \times MI = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{a^2+2}{2\,a^2}} = \frac{\sqrt{a^2+2}}{2\,a}$

Ou encore Aire de $BDM = \frac{\left\|\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DM}\right\|}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$

$\boxed{\text{Exercice 4}}$ On peut faire un tableau (de dénombrement).

	A2	B2	
A1	4	**14 – 2 = 16 – 4**	**22 – 6**
B1	**8 – 4**	2	**4 + 2**
	8	**22 – 8**	22

1° a) sur 22 personnes 8 vont voir a la première semaine : $p(A_1) = \boxed{\dfrac{8}{22}}$

Sur les 14 personnes qui ont vu le film B en première semaine 2 vont revoir le film B
et les 14 – 2 restantes vont voir la film A en deuxième semaine.
Sur les 8 personnes qui ont vu le film A en première semaine 4 vont revoir le film A

$$p(A_2) = \frac{12+4}{22} = \frac{16}{22} = \boxed{\frac{8}{11}}$$

b) Sur les 8 personnes qui ont été voir A en première semaine 4 ont été le revoir

$$p_{A_1}(A_2) = \frac{4}{8} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

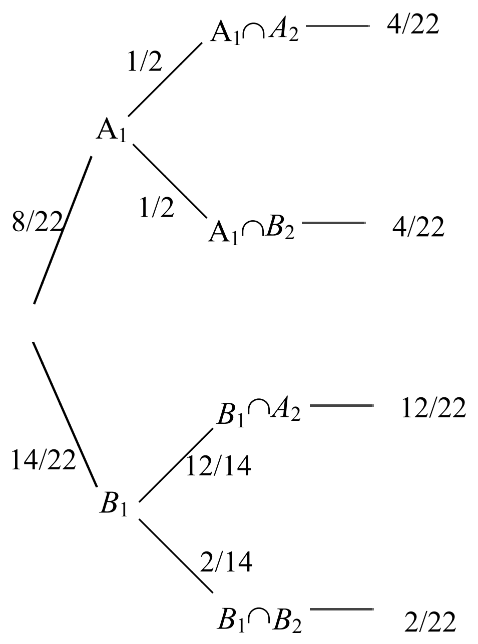
Sur les 22 – 8 = 14 personnes qui ont été voit B en première semaine 14 – 2 ont été le revoir.

$$p_{B_1}(A_2) = = \frac{12}{14} = \boxed{\frac{6}{7}}$$

Parmi ceux qui ont vu A la première semaine 4 vont revoir le film A

$$P(A_1 \cap A_2) = \boxed{\frac{4}{22}}$$

c)



d) On utilise la loi des probabilités totales.

$$p(A_2) = p(A_1 \cap A_2) + p(B_1 \cap A_2) = p(A2) \times p_{A_1}(A_2) + p(B1) \times p_{B_1}(A_2)$$

$$= \frac{4}{22} + \frac{12}{22} = \frac{16}{22} = \boxed{\frac{8}{11}}$$

2° a)

X	6	7,5	9
p	$\frac{1}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{2}{11}$

$$P(X=6) = p(B_1 \cap B_2) = \frac{14}{22} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{11}$$

$$P(X=7{,}5) = p(A_1 \cap B_2) + p(A_2 \cap B_1) = \frac{8}{22} \times \frac{1}{2} + \frac{14}{22} \times \frac{6}{7} = \frac{2}{11} + \frac{6}{11} = \frac{8}{11}$$

$$P(X=9) = p(A_1 \cap A_2) = \frac{4}{22} = \frac{2}{11}$$

b) $E(X) = 6 \times \dfrac{1}{11} + 7{,}5 \times \dfrac{8}{11} + 9 \times \dfrac{2}{11} = \dfrac{6+60+18}{11} = \dfrac{84}{11} \approx 7{,}64$