Exercice 1

**Partie A** : Etude d'une fonction

$f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^{-x}$.

1. Calculer les limites de $f$.
2. Etudier les variations de $f$.
3. Tracer la courbe $C$ représentative de $f$ dans un repère du plan, en prenant une unité graphique de 2 cm.

**Partie B** : Calcul de I = $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ .

1. A l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer la valeur exacte de I.
2. a) Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ soit une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

b) Retrouver alors la valeur de I.

3. Déterminer en cm² l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe $C$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

**Partie C** : Encadrement de J = $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2e^{-x}} dx$ .

1. Démontrer que pour tout réel $u$ de [0; 1] on a : $1-u \leqslant \frac{1}{1+u} \leqslant 1-\frac{u}{2}$ .
2. a) Justifier que pour tout $x$ de [0, 1], $f(x) \in [0, 1]$.

b) En déduire que pour tout $x$ de [0, 1], $1-f(x) \leqslant \frac{1}{1+f(x)} \leqslant 1-\frac{f(x)}{2}$ .

3. A l'aide de cette inégalité, trouver un encadrement de J d'amplitude $10^{-1}$.

## Exercice 2

**Partie 1**

On appelle A l'ensemble des entiers naturels ni multiples de 17 ni multiples de 59. Soit a un élément de A.

1. 59 est-il un nombre premier ? Justifier.
2. Enoncer le petit théorème de Fermat.
3. Quel est le reste de $a^{16}$ dans la division par 17 ?
4. Quel est le reste de $a^{58}$ dans la division par 59 ?
5. Sachant que $16 \times 58 = 928$

En déduire que $a^{928} \equiv 1$ [17]; que $a^{928} \equiv 1$ [ 59 ] et que $a^{928} -1$ est divisible par 1003.

**Partie 2**

1. Déterminer à l'aide de l'Algorithme d'Euclide un couple d'entiers relatifs solution de l'équation $121x - 928y = 1$
2. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $121x - 928y = 1$.
3. En déduire que $x_0 = 905$ est le seul entier naturel inférieur à 928 tel que l'on ait $121x_0 \equiv 1[\ 928]$.

## Exercice 3

Dans le plan P rapporté au repère orthonormal direct ( O ; $\vec{u}, \vec{v}$ ), unité graphique 2cm, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = -1$ et $z_B = 3i$.

Soit la fonction f de P privé du point A dans P qui, à tout point M d'affixe $z$, associe le point M' d'affixe $z$' telle que $z' = i\left(\frac{z-3i}{z+1}\right)$ (1).

1. Quelle est l'affixe du point C' image par f du point C d'affixe $z_C = 2 - i$ ?

2. Soit D' le point d'affixe 1. Montrer qu'il existe un seul point D tel que f(D) = D'.

3. Déterminer la nature du triangle ABC.

4. A l'aide de l'égalité (1), montrer que, pour tout point M distinct de A et de B :

$$OM' = \frac{BM}{AM} \text{ et } (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \ [2\pi].$$

5. On considère les ensembles des points suivants :

- L'ensemble (E) des points M tels que l'image M' soit située sur le cercle ($\Gamma$) de centre O et de rayon 1.

- L'ensemble (F) des points M tels que l'affixe de M' soit réelle.

Pourquoi le point D appartient-il à ces ensembles ?

6. Utiliser la question 4 pour déterminer et construire les ensembles ( E ) et ( F ).

7. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On note $C_1$ l'image du point C par R.

   a) Déterminer l'affixe de $C_1$.

   b) Montrer que $C_1$ appartient à l'ensemble (F).

## Exercice 4

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O\,; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$ comme sur la figure en annexe.

On note A le point de coordonnées (4, 0, 0), B le point de coordonnées (0, 2, 0) et E le milieu de [AB]

1. P est le plan qui a pour équation cartésienne $x + 2y + z - 4 = 0$

a) Démontrer que l'intersection de P et de la droite (OI) est le point A, puis que l'intersection de P et de la droite (OJ) est le point B. Chercher les coordonnées du point C qui est l'intersection de P et de la droite (OK) et le placer sur la figure.

b) Quelles sont les intersections de P et du plan (OIK), puis de P et du plan (OJK), puis de P et du plan (OIJ) ? Placer ces intersections sur la figure.

c) Calculer la distance de O à P

2. Chercher une équation cartésienne du plan médiateur de [AB] noté $P_1$.

## Exercice 1

PARTIE A

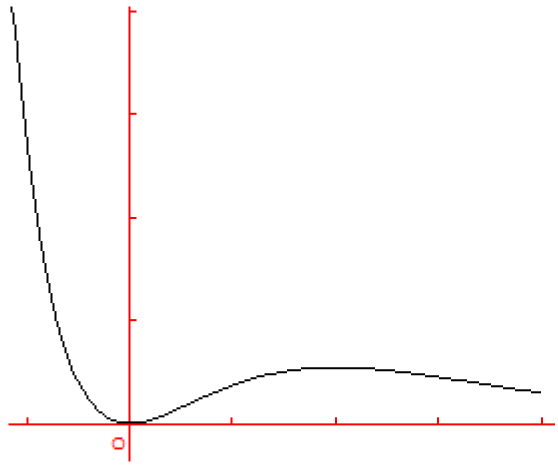
1. $\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}=0$ car à l'infini l'exponentielle l'emporte sur toute puissance de *x*.

2. *f* est le produit de 2 fonctions usuelles dérivables sur ℝ et (uv)'= u'v+uv'

$\forall$ x ∈ ℝ *f '(x)* = $2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$.

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(2-x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | |
| $e^{-x}$ | | + | | + | | + | |
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | $\frac{4}{e^2}$ | ↘ | 0 |




PARTIE B

1. I = $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$ On pose *u(x) = x²* *u'(x) = 2x* *v'(x) =* $e^{-x}$ et *v(x) =* $-e^{-x}$.

Les fonctions *u* et *v* sont dérivables sur IR et leurs dérivées sont continues. D'après le théorème sur l'intégration par parties $\int uv'=[uv]-\int u'v$ .Donc I = $\left[-x^2e^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 -2xe^{-x}dx$ = $e^{-1}+2\int xe^{-x}dx$

On pose *u(x) = x* *u'(x) = 1* *v'(x) =* $e^{-x}$ et v'*(x)* = - $e^{-x}$ .

I = $-e^{-1}+2\left(\left[-xe^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 -e^{-x}dx\right)$ = $-e^{-1}-2e^{-1}-2\left[e^{-x}\right]_0^1=-5e^{-1}+2$

2.a) On doit avoir F' = *f*.

Or, $\forall$ x ∈ ℝ, F'(*x*) = $(2a+b)e^{-x}+(ax^2+bx+c)(-e^{-x})$ = $e^{-x}[-ax^2+(2a-b)x+(b-c)]$

Il suffit que $\begin{cases}-a=1\\2a-b=0\\b-c=0\end{cases}$ . F définie par F(*x*) = (-*x*²-2*x*-2) $e^{-x}$ est une primitive de *f* sur ℝ.

b)d'où I = $[F(x)]_0^1=-5e^{-1}+2$

3.f est continue et positive sur IR donc A= $\int_0^1 f(x)dx$ en u.a. , or 1 u.a. = 4cm² donc

A = $8 - 20e^{-1}$ cm².

<u>PARTIE C</u>

1. $\forall\, u \in [0\,;1]\,,\, \dfrac{1}{1+u} - (1-u) = \dfrac{u^2}{1+u}$ . $u^2 \geq 0$ et $1 + u > 0$ donc $\dfrac{1}{1+u} \geq 1-u$ .

$1 - \dfrac{u}{2} - \dfrac{1}{1+u} = \dfrac{u(1-u)}{1+u}$ . $u \geqslant 0$ , $1 - u > 0$ et $1 + u > 0$ donc $1 - \dfrac{u}{2} \geq \dfrac{1}{1+u}$ .

2.a) $f$ est croissante sur [0; 1] donc $\forall$ x $\in$ [0; 1] $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$ or $f(0) = 0$ et $f(1) < 1$ d'où $f(x) \in [0; 1]$
b) On remplace donc $u$ par $f(x)$ dans l'inégalité précédente

3.En intégrant cette inégalité sur [0; 1] on obtient $\displaystyle\int_0^1 (1 - f(x))\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+f(x)}\,dx \leqslant \int_0^1 \left(1 - \frac{f(x)}{2}\right)dx$ .

D'après la linéarité de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 1\,dx$ – I $\leqslant$ J $\leqslant$ $\displaystyle\int_0^1 1\,dx - \frac{1}{2}$ I d'où 1- I $\leqslant$ J $\leqslant$ 1– $\dfrac{1}{2}$ I

Or 1 – I $\approx$ 0,839 et 1– $\dfrac{1}{2}$ I $\approx$ 0,919 donc 0,83 $\leqslant$ J $\leqslant$ 0,93.

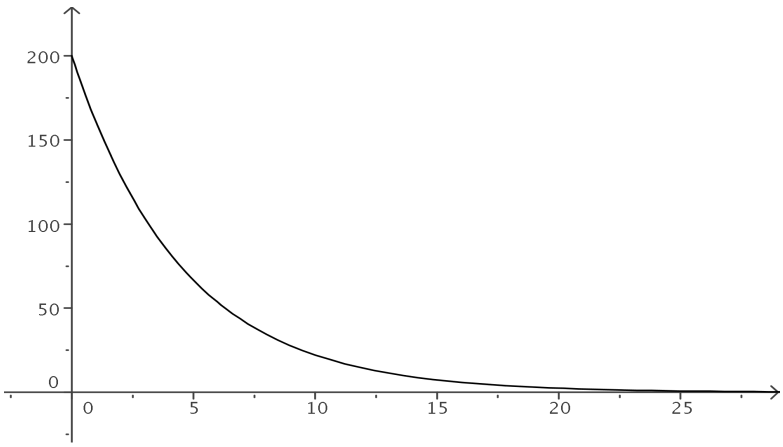
## Exercice 2 Spé SVT ou Physique

**Partie 1**

1. Comme Q'(t) = – k Q(t), il existe un réel C tel que Q(t) = $Ce^{-kt}$. D'autre part Q(0) = 200, on a C = 200 et donc Q(t) = $200e^{-kt}$.

2. Q(1) = 160, donc 160 = $200e^{-k}$, d'où ln 160 = ln 200 – k, soit k = ln $\dfrac{200}{160}$ = ln $\dfrac{5}{4}$ $\approx$ 0,22.

3. Q(t) = $200e^{-0,22t}$ est toujours positif.
Q'(t) = – 0,22 Q(t) est donc négatif et
Q est une fonction décroissante.
De plus, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} Q(t) = 0$ , donc sur [0, +∞[,
la fonction Q décroit de 200 à 0.




4. Q(t) $\geqslant$ 80 ⇔ $200e^{-0,22t} \geqslant 80$
⇔ $e^{-0,22t} \geqslant 0,4$ ⇔ – 0,22t $\geqslant$ ln 0,4
⇔ t $\leqslant$ $\dfrac{-\ln 0,4}{0,22}$ .
Comme $\dfrac{-\ln 0,4}{0,22}$ $\approx$ 4,16, il faut procéder à une nouvelle injection avant 4,16h.

**Partie 2**

1. R(t) = Q(t) – $\dfrac{A}{k}$ , donc R'(t) = Q'(t) = A – kQ(t) = k( $\dfrac{A}{k}$ – Q(t)) = – k(Q(t) – $\dfrac{A}{k}$ ) = – kR(t). R est donc solution de l'équation différentielle y' = – ky.

2. On en déduit qu'il existe un réel C tel que R(t) = $Ce^{-kt}$. A l'instant t = 0, Q(0) = 100, donc
R(0) = Q(0) – $\dfrac{A}{k}$ = 100 – $\dfrac{A}{k}$ = C. On a donc bien R(t) = $\left(100 - \dfrac{A}{k}\right)e^{-kt}$ .

Comme R(t) = Q(t) – $\frac{A}{k}$ , Q(t) = R(t) + $\frac{A}{k}$ = $\left(100-\frac{A}{k}\right)e^{-kt}+\frac{A}{k}$ .

3. Lorsque t tend vers $+\infty$, $e^{-kt}$ tend vers 0, donc Q(t) tend vers $\frac{A}{k}$ . Pour que cette limite soit égale à 80, il faut que A = 80k = 17,6.

## Exercice 3

1. C' a pour affixe : $i\left(\frac{2-i-3i}{2-i+1}\right)=i\left(\frac{(2-4i)(3+i)}{10}\right)=1+i$

2. f(D) = D' ssi $i(z-3i) = z + 1$. On obtient $z = \frac{2}{1-i}=1+i$ .

3. AB² = 10 ; AC² = 10 ; BC² = 20. Le triangle ABC est donc rectangle isocèle.

4. On peut interpréter géométriquement cette égalité :

a) en modules : $|i|\left|\frac{z-3i}{z+1}\right|=1\frac{|z-3i|}{|z+1|}=\frac{BM}{AM}=|z'|$ , on obtient l'égalité : OM' = $\frac{BM}{AM}$

b) avec les arguments : arg(z') = $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'})$

et $\arg\left(i\left(\frac{z-3i}{z+1}\right)\right)=\arg i+\arg\left(\frac{z-3i}{z+1}\right)=\frac{\pi}{2}+(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB})+k\cdot 2\pi$ , $k \in \mathbb{R}$.

D'où l'égalité demandée.

5. D' a pour affixe 1; cette affixe est égale au rayon du cercle donc D appartient à (E), d'autre part cette affixe est réelle donc D appartient aussi à (F).

6. a) $M'\in\Gamma\Leftrightarrow OM'=1\Leftrightarrow BM=AM$ donc (E) est la médiatrice du segment [AB].

b) Considérons d'abord les points M distincts de A et de B :

L'affixe de M' est réelle $\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}+(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=k\pi\Leftrightarrow(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB})=\frac{-\pi}{2}+k\pi$ .

(F) est donc le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.

Si M = B, alors z'=0, cette affixe est réelle donc B appartient à (F).

(F) est donc le cercle de diamètre [AB] privé du point A.

7. a) $C_1$ a pour affixe: $iz_C = 1 + 2i$.

b) L'image de $C_1$ a pour affixe : z' = $i\frac{1+2i-3i}{1+2i+1}=i\left(\frac{1-i}{2+2i}\right)=\frac{1+i}{2(1+i)}=\frac{1}{2}$ .

Cette affixe est réelle donc $C_1$ appartient à l'ensemble (F).

## Exercice 4

**Partie 1**

1. On applique le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles isocèles :
BC² = AB² + AC² = 2a² puis DC² = AD² +AC² = 2a² et BD² = AB² + AD² = 2a², les 3 côtés sont bien égaux

2. I est le milieu de [DC] donc (AI) est une médiane du triangle ADC mais puisque ce triangle est isocèle en A c'est aussi une hauteur donc (AI) ⊥ (DC) puis $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{DC}$ et donc $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{DC} = 0$

1 a) Intersection de P et (OI).

Le point d'intersection a des coordonnées qui vérifient les 3 conditions : $x + 2y + z - 4 = 0$ et $y = 0$ et $z = 0$, on trouve que $x = 4$. Le point d'intersection est A (4, 0, 0).

De la même façon : $P \cap (OJ) = \{B\}$ et $P \cap (OK) = \{C\}$ avec C (0, 0, 4).

b) L'intersection de P et (OIK) est une droite qui passe A et C, c'est (AC) puis $P \cap (OJK) = (BC)$ et $P \cap (OIJ) = (AB)$. Faire le dessin.

d) Par cours la distance de O à P est $= \dfrac{|0+2\times 0+0-4|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{6}} = 2\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

2. <u>Méthode possible</u> :

$P_1$ est le plan passant par le milieu de [AB] et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$. Le milieu de [AB] est G(2, 1, 0) et les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont (– 4, 2, 0). Une équation de $P_1$ est donc $-4x + 2y + 0z + d = 0$ et les coordonnées de G vérifient cette équation car G est dans $P_1$ donc $-8 + 2 + d = 0$ et $d = 6$ d'où une équation de $P_1$ est $-4x + 2y + 6 = 0$ ou une autre $\underline{-2x + y + 3 = 0}$ .

## Exercice 2

**PARTIE 1**

1) 59 est un nombre premier car il n'est pas divisible par un nombre premier inférieur à sa racine carrée c'est à dire par 2 ; 3 ; 5 et 7 .
2) PETIT THEOREME DE FERMAT :
Si p est un entier naturel PREMIER, si a est un entier non divisible par p
alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p.
3) a n'est pas multiple de 17 , 17 est premier donc d'après le petit théorème de Fermat le reste de $a^{16}$ dans la division par 17 est 1. donc $a^{16} \equiv 1\ [17]$
4) a n'est pas multiple de 59 , 59 est premier donc d'après le petit théorème de Fermat le reste de $a^{58}$ dans la division par 59 est 1; donc $a^{58} \equiv 1[59]$
5) Sachant que $16 \times 58 = 928$
$a^{928} = (a^{16})^{58}$ comme $a^{16} \equiv 1[17]$ on a $(a^{16})^{58} \equiv 1^{58}\ [17]$ donc $a^{928} \equiv 1[17]$
$a^{928} = (a^{58})^{16}$ comme $a^{58} \equiv 1\ [\ 59\ ]$ on a $(a^{58})^{16} \equiv 1^{16}\ [\ 59\ ]$ donc $a^{928} \equiv 1\ [\ 59\ ]$
$a^{928} - 1$ est divisible par 17 et 59 premiers entre eux donc est divisible par leur produit 1003.

**PARTIE 2**

1)appliquons l'Algorithme d'Euclide à 928 et 121
$928 = 121 \times 7 + 81$ avec $0 \leq 81 < 121$ égalité ( 3 )
$121 = 81 \times 1 + 40$ avec $0 \leq 40 < 81$ égalité ( 2 )
$81 = 40 \times 2 + 1$ avec $0 \leq 1 < 40$ égalité ( 1 )
d'après l' égalité ( 1 ) $1 = 81 - 2 \times 40$
d'après l' égalité ( 2 ) $1 = 81 - 2 \times ( 121 - 81) = 3 \times 81 - 2 \times 121$
d'après l' égalité ( 3 ) $1 = 3 ( 928 - 121 \times 7) - 2 \times 121 = 3 \times 928 - 23 \times 121$
un couple solution d'entiers relatifs de l'équation $121 x - 928 y = 1$ est ( -23; -3)
2) $121 x - 928 y = 1 \Leftrightarrow 121 x - 928 y = -23 \times 121 - 928 \times (-3) \Leftrightarrow$
$121 ( x +23 ) = 928 ( y +3)$
121 divise 928 ( y +3)
121 est premier avec 928 ( dernier reste non nul 1 dans l'algorithme d'Euclide)
donc d'après le théorème de Gauss 121 divise y +3 donc $y = 121k - 3$ avec $k \in Z$
en remplaçant dans $121 ( x +23 ) = 928 ( y +3)$ on obtient $x = 928k - 23$
les couples solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de $121 x - 928 y = 1$ sont $( 928k - 23; 121k - 3 )$ avec $k \in \mathbb{Z}$ .
3) $121 x_0 \equiv 1\ [\ 928] \Leftrightarrow$ il existe un entier relatif q tel que $121x = 928q + 1$
donc même équation et mêmes solutions ( x ; y ) on veut $0 \leq x < 928$
$0 \leq 928k - 23 < 928$ a pour seule solution entière k = 1 donc $x_0 = 905$
donc $x_0 = 905$ est le seul entier naturel inférieur à 928 tel que l'on ait $121 x_0 \equiv 1\ [\ 928]$