Division euclidienne - congruence

Exercice 1

Soit n et a deux entiers naturels non nuls.

1) On suppose que a divise (42n + 37) et a divise (7n + 4). Montrer que a divise 13.

2) En déduire les valeurs possibles de a.

Exercice 2

1) Ecrie la division euclidienne de 1 000 par 13.

Soit n un entier naturel.

2) Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de 10^{3n} par 13.

3) Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de $10^{3n+1}+10^{3n}$ par 13.

4) En déduire le reste de la division euclidienne par *13* de *11 000 000 000 000*.

5) Quel est le reste de la division euclidienne par 13 de $25\times 10^{15}+1$.

Exercice 3

1) Montrer que $5^0 \equiv 1(13)$, $5^1 \equiv 5(13)$, $5^2 \equiv -1(13)$, $5^3 \equiv -5(13)$

2) En déduire que pour tout entier naturel k :

$$5^{4k} \equiv 1(13)\ ;\quad 5^{4k+1} \equiv 5(13)\quad ;\quad 5^{4k+2} \equiv -1(13)\ ;\quad 5^{4k+3} \equiv -5(13).$$

3) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que: $5^{2n}+5^{n} \equiv 0(13)$.

Inverse modulo

Exercice 4

1) On considère l'ensemble $A_7 = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$.

a) Pour tout élément a de A_7 , écrire dans le tableau suivant (sans justifier) l'unique élément y de A_7 tel que $a\,y \equiv 1 \quad (mod\,7)$.

a	1	2	3	4	5	6
y						

b) Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5 \quad (mod\,7)$ équivaut à $x \equiv 4 \quad (mod\,7)$.

c) Si a est un élément de A_7 , montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $a\,x \equiv 0 \quad (mod\,7)$ sont les multiples de 7.

2) Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.
On considère l'ensemble $A_p = \{1\,;2\,;...\,;p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. Soit a un élément de A_p .

a) Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $a\,x \equiv 1 \quad (mod\;p)$.

b) On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p de l'équation $a\,x \equiv 1 \quad (mod\;p)$.

c) Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $x\,y \equiv 0 \quad (mod\;p)$ si et seulement si x est un multiple de p ou y est un multiple de p.

d) Application: $p = 31$.

Résoudre dans A_{31} les équations $2x \equiv 1 \quad (mod\,31)$ et $3x \equiv 1 \quad (mod\,31)$.
A l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \quad (mod\,31)$.

Equation du type ax + by = c où a, b et c sont des entiers

Exercice 5

1. On considère l'équation (E_1) :
$$6x - 5y = 7$$
dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs.
   (a) On suppose que le couple d'entiers (x, y) vérifie $6x - 5y = 7$.
   Démontrer que $x \equiv 2\ [5]$
   (b) En déduire tous les couples d'entiers, solutions de l'équation (E_1).

2. *Application* : dans le plan muni d'un repère $(O\,;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$, on note Δ la droite d'équation
$$6x - 5y = 7$$
Déterminer le nombre de points de Δ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est inférieure à 500.

3. On considère à présent l'équation (E_2) :
$$6x^2 - 5y^2 = 7$$
dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs.
   (a) Vérifier que si le couple $(x\,;y)$ est solution de (E_2), alors
$$x^2 \equiv 2 \quad [5]$$
   (b) Démontrer que, pour tout entier α, α^2 est congru à 0, à 1 ou à 4 modulo 5.
   (c) Quel est l'ensemble solution de l'équation (E_2) ?

Exercice 6

1. On considère l'équation (E) : $109x - 226y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?
b. Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme

$(141+226k,\ 68+109k)$, où k appartient à **Z.**

En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1+226e$. (On précisera les valeurs des entiers d et e.)

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leq 226$.

On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :

à tout entier de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227,

à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a. Vérifier que $g[f(0)] = 0$.

On rappele *le résultat* suivant *appelé* petit théorème *de Fermat :*

Si p **est un nombre premier et** a **un entier non divisible par** p **alors** $a^{p-1} \equiv 1$ **modulo** p.

b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1$ [modulo 227].
c. En utilisant **1. b.,** en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A. $g[f(a)] = a$. Que peut-on dire de $f[(g(a)] = a$?

Exercice7

1. On considère l'équation (E) : $17x - 6y = 2$, où x et y sont des entiers.

a) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $17x = 6y$.

b) A l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de $17x - 6y = 1$.
Montrer que le couple $(-1 ; -3)$ est une solution particulière de l'équation $17x - 6y = 1$, en déduire une solution particulière de l'équation (E).

c) En déduire tous les couples de $\mathbb{Z}^2$ solution de (E).

d) Montrer que le pgcd des couples solution de (E) est 1 ou 2.

e) Déterminer les couples $(x ; y)$ solution de (E) dont le pgcd est 2.

f) Déterminer le couple $(x_0 ; y_0)$ solution de (E) tel que : $\text{pgcd}(x_0 ; y_0) = 2$ et $100 \leq y_0 \leq 150$.

Exercice7

1°) a) On considère l'équation : $17x = 6y$.

6 et 17 étant premiers entre eux (car 17 est premier et ne divise pas 6),

6 divise $17x$ donc d'après le théorème de Gauss 6 divise x.

Il existe donc un entier k tel que $x = 6k$, et donc $6y = 17 \times 6k$ et $y = 17k$.

Réciproquement, on a $17 \times 6k = 17 \times 6k$

Donc tous les couples $(6k ; 17k)$ sont solutions.

Les solutions dans $\mathbb{N}^2$ de cette équation sont donc $S_1 = \{(6k ; 17k), k \in \mathbb{N}\}$.

b) On a $17 = 6 \times 2 + 5 \Rightarrow 5 = 17 - 6 \times 2$

$6 = 5 \times 1 + 1 \Rightarrow 1 = 6 - 5 \times 1 = 6 - 1 \times (17 - 6 \times 2) = 17 \times (-1) + 6 \times (-3)$

$\Rightarrow 17\times(-1) - 6\times(-3) = -17 + 18 = 1$, donc $(-1 ; -3)$ est solution de l'équation $17x - 6y = 1$.

On obtient facilement que $(-2 ; -6)$ est une solution de (E).

c) (E) est donc équivalente à $17x - 6y = 17 \times (-2) - 6 \times (-6)$, donc aussi à $17(x + 2) = 6(y + 6)$ (1)

- 1ère Méthode : nous connaissons d'après le a) les solutions de cette dernière : $x + 2 = 6k$ et $y + 6 = 17k$, où k est un entier quelconque.

  Les solutions de (E) sont donc $S_2 = \{(6k - 2 ; 17k - 6), k \in \mathbb{Z}\}$.
- 2ème Méthode : 6 et 17 étant premiers entre eux (car 17 est premier et ne divise pas 6),

  donc d'après le théorème de Gauss 17 divise $y + 6$.

$\Rightarrow$ il existe un entier relatif k tel que $y + 6 = 17k$, c'est-à-dire $y = 17k - 6$.

en reportant dans l'équation (1) on a : $17(x + 2) = 6 \times 17k$

c'est à dire $x = 6k - 2$.

Réciproquement, on a $17 \times (6k - 2) - 6(17k - 6) = 2$.

Donc tous les couples $(6k - 2 ; 17k - 2)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont solutions.

d) Tout diviseur commun à x et y solution de (E) divise aussi $17x - 6y$, c'est à dire 2.

Le pgcd de x et y est donc un diviseur positif de 2, ce ne peut être que 1 ou 2.

e) Il résulte du d) que le pgcd d'un couple $(x ; y)$ solution de (E) est égal à 2 si et seulement si 2 divise x et y.

Or 2 divise $6k$ et 2, donc 2 divise $6k - 2$, donc 2 divise toujours x.

En revanche, 2 divise 6, donc 2 divise $y = 17k - 6$ si et seulement si 2 divise $17k$.

Comme 2 est premier avec 17, 2 divise $17k$ si et seulement si 2 divise k d'après le théorème de Gauss, c'est à dire $k = 2p$, $p \in \mathbb{Z}$.

Les solution de (E) de pgcd 2 sont donc $(12p - 2 ; 34p - 6)$.

f) On veut donc avoir $y = 34p - 6$ et $100 \leq y \leq 150$, la seule valeur entière possible de p est 4.

La solution recherchée est donc (46 ; 130).