FONCTION EXPONENTIELLE (I)

Exercice 1(vrais ou faux)

Les parties I, II et III et IV sont indépendantes

I-Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{x^3}$ et C sa courbe représentative.

a. f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\left[\dfrac{e^3}{27};+\infty\right[$.

b. La droite (Δ) d'équation $x=3$ est axe de symétrie de la courbe C.

c. C admet une unique tangente parallèle à l'axe (Ox) et elle est obtenue au point d'abscisse $x=3$.

d. La tangente à C au point d'abscisse 1 a pour équation : $y=-2ex-e$.

II-Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x^2+1}-\dfrac{x}{2}$ et C sa courbe représentative.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b. La droite D d'équation $y=-\dfrac{x}{2}$ est asymptote à C.

c. f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

d. L'équation $f(x)=0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$.

III-Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$ et C sa courbe représentative.

a. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x réel on a : $f'(x)=\dfrac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

c. L'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution réelle.

d. La droite *D* d'équation $y=1+x$ est asymptote à C.

IV-Pour tout réel *m*, on considère l'équation (E_m) : $e^{2x}-2e^x-m=0$.

a. L'unique valeur de *m* pour laquelle *x* = 0 est solution de l'équation (E_m) est *m* = 0.

b. Pour toute valeur de m, l'équation (E_m) admet au moins une solution.

c. Si $-1<m<0$, l'équation (E_m) a deux solutions positives.

d. Si $m>0$, l'équation (E_m) a une unique solution.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x)=\left(\dfrac{1-x^2}{x}\right)e^{-x}$ et g définie par :

$g(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

Répondre par vrai ou faux en justifiant sa réponse.

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

B. la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe représentative de f quand f tend vers $+\infty$.

C. La fonction dérivée de f et la fonction g ont le même signe.

D. La fonction f atteint un minimum pour $x = 1$.

Exercice 3

Soient f et g les fonctions définies de $]0\ ;\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ et $g(x)=2e^{2x}-5e^x+2$.

a. Démontrer que $f(x)=2x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e^x-1}=2x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{e^x}{e^x-1}$

b. Factoriser $g(x)$.

c. Déterminer le signe de la dérivée de f.

Exercice 4

Démontrer que quel que soit le réel x on a : $\ln(e^x+1)-\ln(1+e^{-x})=x$.

Exercice 5

Résoudre les systèmes :

a. $\begin{cases} 2^x-3^y=5 \\ 3\times 2^x+3^y=24 \end{cases}$ b. $\begin{cases} \ln x+\ln y=-2\ln 4 \\ e^x e^y=\dfrac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=(x-1)\left(2-e^{-x}\right)$.

Sa courbe représentative *C* est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2 cm).

1. a. Étudier la limite de *f* en $+\infty$.

b. Montrer que la droite Δ d'équation *y* = 2*x* −2 est asymptote à *C* .

c. Étudier la position relative de *C* et Δ.

2. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = xe^{-x} + 2\left(1 - e^{-x}\right)$.

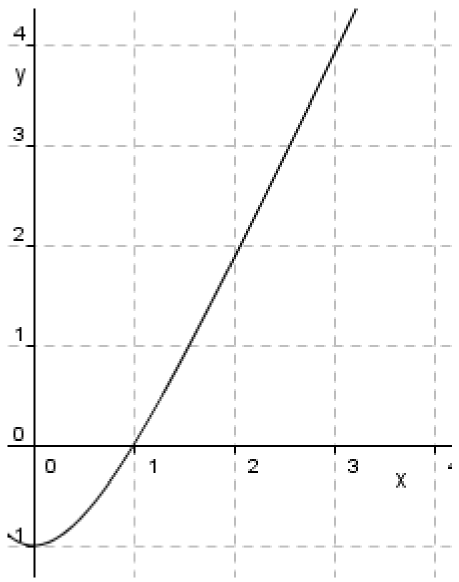
b. En déduire que, pour tout réel *x* strictement positif, $f'(x) > 0$.

c. Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de *f* .

3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm^2, du domaine plan limité par la courbe *C* , la droite Δ et les droites d'équations *x* = 1 et *x* = 3.

4. a. Déterminer le point *A* de *C* où la tangente à *C* est parallèle à Δ.

b. Calculer la distance, exprimée en cm, du point *A* à la droite Δ.



Exercice 7

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Etudier les variations de la fonction *g* sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de *g*.

2. Justifier que pour tout *x*, $e^x - x > 0$.

Partie B

1. a. Calculer les limites de la fonction *f* en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. a. Calculer $f'(x)$, (f' désignant la fonction dérivée de f).

b. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

b. A l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

4. Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe (C).

Exercice 8

On considère la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.

Soit C la représentation graphique de la fonction *g* dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 2 cm.

1. Calculer la dérivée *g'* de *g*. Montrer que *g'*(*x*) est du signe de $(1 - x^2)$. En déduire les variations de *g*.

2. Montrer que :

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et préciser l'asymptote à C correspondante.

3. Tracer la courbe C dans le repère $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$. On placera en particulier les points de la courbe d'abscisses respectives −2 ; −1 ; 0 ; 1 et 3.

4. a. Par une lecture graphique, indiquer, suivant les valeurs du nombre réel *k*, le nombre de solutions de l'équation *g*(*x*) = *k*.

b. Prouver rigoureusement que l'équation *g*(*x*) = 2 admet une solution α et une seule. Prouver que α appartient à l'intervalle [− 2 ; − 1].

c. Montrer que α vérifie la relation $\alpha = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$.

CORRECTION

Exercice 1Correction

I-a. Faux : La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x)=\dfrac{e^x(x-3)}{x^4}$, or pour *x* $\in$ $[3,+\infty[$,
$f'(x)\geq 0$ car $e^x>0$ et $x^4>0$ et pour $x\in\left]0\,,3\right[$ $f'(x)<0$. *f* n'est pas monotone sur $\mathbb{R}_+^*$ et elle ne réalise donc pas une bijection.

b. Faux : Si la droite Δ d'équation $x=3$ est axe de symétrie de la courbe C alors *f* doit être paire dans le repère $\left(I,\vec{i},\vec{j}\right)$ avec $I(3,0)$. Posons $\begin{cases} y=Y \\ x=X+3 \end{cases}$ alors

$Y=f(X)=\dfrac{e^{X+3}}{(X+3)^3}\neq f(-X)=\dfrac{e^{-X+3}}{(-X+3)^3}$. Donc *f* n'est pas paire dans le repère $\left(I\,;\,\vec{i},\vec{j}\right)$ avec *I*(3, 0).

c. Vrai : $f'(x)=\dfrac{e^x(x-3)}{x^4}=0$ pour *x* = 3 car $e^x>0$ donc C admet une unique tangente parallèle à l'axe (Ox) et elle est obtenue au point d'abscisse *x* = 3.

d. Faux : La tangente à C au point d'abscisse 1 a pour équation :
$y=f'(1)\cdot(x-1)+f(1)=-2ex+3e$.

II-a. Faux : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{x^2+1}-\dfrac{x}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x(x^2+1)}-\dfrac{x}{2}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x(x^2+1)}=0$.

b. Vrai : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\left(-\dfrac{x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{x^2+1}=0$ donc la droite *D* d'équation $y=-\dfrac{x}{2}$ est asymptote à C en $+\infty$ et elle est située au dessus de *C* car $\dfrac{e^{-x}}{x^2+1}>0$.

c. Vrai : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$;

$f'(x)=\dfrac{-e^{-x}(x^2+1)-e^{-x}(2x)}{(x^2+1)^2}-\dfrac{1}{2}$ soit $f'(x)=\dfrac{-e^{-x}(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-e^{-x}(x+1)^2}{(x^2+1)^2}-\dfrac{1}{2}$ qui est toujours strictement négative car somme de deux termes strictement négatifs. f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

d. Vrai : La fonction f est dérivable et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, *f*(0)=1 positif et *f*(1)= $\dfrac{1}{2e}-\dfrac{1}{2}$ donc négatif. *f* est donc bijective et il existe un unique réel $\alpha\in\left]0\,;1\right[$ solution de l'équation $f(x)=0$.

III-a. Faux : $f'(x)=\dfrac{e^x\left(e^x+1\right)-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}-\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}<0$.

b. Vrai : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\ln 1 = 0$.

c. Vrai : D'après a. $f'(x) < 0$ donc *f* est strictement décroissante et d'après b) f tend vers 0 en – ∞ donc *f* < 0 sur $\mathbb{R}$ et l'équation n'a pas de solution réelle dans $I = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

d. Faux : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\cdot\left(\frac{1}{e^x}+1\right)} = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+e^x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln e^x(e^{-x}+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \ln(e^{-x}+1)$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -\ln(1+e^x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} -2x - \ln(e^{-x}+1) = -\infty$ et pour finir $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (1+x) = -\infty$.

Conclusion : la droite D d'équation *y*=*x*+1 n'est pas asymptote à *f*(*x*) mais la droite d'équation $y = 1-x$ est asymptote à *f*(*x*).

IV-a. Faux : Si *x* = 0 alors l'équation (E_m) s'écrit $e^0 - 2e^0 - m = 0$ soit $m = -1$.

b. Faux : Posons $X = e^x > 0$, on a alors l'équation $X^2 - 2X - m = 0$ où $\Delta = 4 + 4m$.

On obtient au moins une solution pour $m \geq -1$ telles que $X_1 = \frac{2+2\sqrt{1+m}}{2} = 1+\sqrt{1+m}$ et $X_2 = 1-\sqrt{1+m}$.

Si *m*< –1 il n'y a pas de solution.

c. Faux : X_1 est évidemment positive. Etudions le signe de X_2 :
$1-\sqrt{1+m} > 0 \Leftrightarrow 1 > \sqrt{1+m} \Leftrightarrow m < 0$.

Donc pour $-1 < m < 0$ il y a deux solutions X_1 et X_2 positives et on obtient
$x_1 = \ln\left(1+\sqrt{1+m}\right) > \ln 1$ soit $x_1 > 0$ et $x_2 = \ln\left(1-\sqrt{1+m}\right) < \ln 1$ soit $x_2 < 0$.

d. Vrai : Si *m*>0, $1-\sqrt{1+m} < 0$ donc $X_2 = e^x > 0$ n'a pas de solutions et $1+\sqrt{1+m} > 0$ par conséquent $x_1 = \ln\left(1+\sqrt{1+m}\right)$.

Exercice 2 : Correction

A : FAUX

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1-x^2}{x}\right)e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{xe^x} - \frac{x}{e^x}\right) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{xe^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (théorème).

B : VRAI

La réponse est dans la question précédente ; comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, par définition, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe.

C : VRAI

$f(x)=\left(\dfrac{1-x^2}{x}\right)e^{-x}=\dfrac{1}{x}e^{-x}-xe^{-x}$; f est dérivable sur $\mathbb{R}$*.

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}e^{-x}-\dfrac{1}{x}e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=\dfrac{e^{-x}}{x^2}\left(x^3-x^2-x-1\right)=\dfrac{e^{-x}}{x^2}g(x)$.

Dans la mesure où on compare f et g sur l'intersection de leur domaine de définition ($\mathbb{R}$ *+), les deux fonctions ont le même signe.

D : FAUX

La fonction f' ne s'annule pas en 1, elle n'admet donc pas de minimum pour $x = 1$.

Remarque : $f(1) = 0$, la courbe coupe donc l'asymptote en 1, … mais aussi en –1.

Exercice 3 : Correction

a. $2x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e^x-1}=2x+\dfrac{e^x-1+2}{2(e^x-1)}=2x+\dfrac{1}{2}.\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=f(x)$

$2x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{e^x}{e^x-1}=2+\dfrac{-e^x+1+2e^x}{2(e^x-1)}=2x+\dfrac{1}{2}.\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=f(x)$;

b. $g(x)=2e^{2x}-5e^x+2,\ X=e^x$, $\Delta=5^2-4\times2\times2=25-16=9=3^2$, $X=\dfrac{5\pm3}{4}$, $X_1=e^{x_1}=2$, $X_2=e^{x_2}=\dfrac{1}{2}$,

$g(x)=2(e^x-2)(e^x-\dfrac{1}{2})$.

c. $f(x)=2x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e^x-1}$,

$f'(x)=2-\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{2(e^x-1)^2-e^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{2(e^{2x}-2e^x+1)-e^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2}=\dfrac{g(x)}{(e^x-1)^2}$

est donc du signe de $g(x)$ et f est donc négative entre ln 2 et – ln 2, positive ailleurs.

Exercice 4 Correction

$\ln(e^x+1)-\ln(1+e^{-x})=x\Leftrightarrow\ln\dfrac{e^x+1}{1+e^{-x}}=x\Leftrightarrow\dfrac{e^x+1}{1+e^{-x}}=e^x\Leftrightarrow e^x+1=e^x(1+e^{-x})\ \Leftrightarrow e^x+1=e^x+1$.

Exercice 5 Correction

$\begin{cases}2^x-3^y=-1\\3\times2^x+3^y=33\end{cases}\Rightarrow4\times2^x=32,2^x=8,x=3$, $\begin{cases}x=3\\8-3^y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\3^y=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$, S = {(3 ;2)}.

$$\begin{cases} \ln x+\ln y=-2\ln 4 \\ e^x.e^y=\dfrac{1}{\sqrt{e}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln xy=\ln 4^{-2} \\ e^{x+y}=e^{-\frac{1}{2}} \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} xy=\dfrac{1}{16} \\ x+y=-\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Soit à résoudre l'équation : $X^2 - SX + P = 0$, $X^2+\frac{1}{2}X+\frac{1}{16}=0 \Leftrightarrow (X+\frac{1}{4})^2=0 \Leftrightarrow X=-\frac{1}{4}=x=y$.

Or, bien évidemment, les valeurs négatives sont exclues car ln n'est pas définie sur $\mathbb{R}_-$ donc S = $\varnothing$.

Exercice 6 : Correction

1. a. En $+\infty$, $x-1$ tend vers $+\infty$ et $2-e^{-x}$ tend vers 2 car e^{-x} tend vers 0 ; *f* a pour limite $+\infty$.

b. $f(x)-(2x-2)=(x-1)\left(2-e^{-x}\right)-2(x-1)=(x-1)(-e^{-x})$: avec les croissances comparées, e^{-x} emmène tout le monde vers 0, la droite Δ d'équation $y = 2x -2$ est bien asymptote à *C* .

c. Signe de $f(x)-(2x-2)=-(x-1)e^{-x}$: lorsque $x\le 1$ c'est positif, donc *C* est au-dessus de Δ ; lorsque $x\ge 1$ c'est négatif, donc *C* est en dessous de Δ.

3. a. $f'(x)=(x-1)'\left(2-e^{-x}\right)+(x-1)\left(2-e^{-x}\right)'=2-e^{-x}+(x-1)e^{-x}=2-2e^{-x}+xe^{-x}$ d'où

$f'(x)=xe^{-x}+2(1-e^{-x})$.

b. Comme x est positif, $xe^{-x}>0$ et $x>0 \Rightarrow -x<0 \Rightarrow e^{-x}<e^0=1 \Rightarrow e^{-x}-1<0 \Rightarrow 1-e^{-x}>0$ donc *f′* est positive.

c. $f'(0)=0+2(1-1)=0$.

x	0	$+\infty$
f'	0 $+$	
f	-1 $\nearrow$	$+\infty$

2. Comme $x\ge 1$ il faut calculer $-\int_1^3 -(x-1)e^{-x}\,dx$: on pose $\begin{cases} u=x-1 \\ v'=e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'=1 \\ v=-e^{-x} \end{cases}$ d'où

$$\int_1^3 (x-1)e^{-x}\,dx=\left[-(x-1)e^{-x}\right]_1^3-\int_1^3 -e^{-x}\,dx=-2e^{-3}-\left[e^{-x}\right]_1^3=-2e^{-3}-\left[e^{-3}-e^{-1}\right]=e^{-1}-3e^{-3}.$$

Comme l'unité d'aire est de 2 cm x 2 cm, soit 4 cm^2, on a donc $\left(e^{-1}-3e^{-3}\right)4\approx 0,87\text{ cm}^2$.

3. a. La tangente à *C* est parallèle à Δ lorsque $f'(x)=2$: mêmes coefficients directeurs ; on a donc $f'(x)=xe^{-x}+2-2e^{-x}=2 \Leftrightarrow xe^{-x}-2e^{-x}=0 \Leftrightarrow (x-2)e^{-x}=0 \Rightarrow x=2$. Le point A a pour coordonnées 2 et $f(2)=(2-1)\left(2-e^{-2}\right)=2-e^{-2}$.

b. La distance du point *A* à la droite $ax+by+c=0$ est $\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$; ici Δ a pour équation cartésienne

$2x-y-2=0$ d'où notre distance est $\dfrac{\left|2.2-(2-e^{-2})-2\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{e^{-2}}{\sqrt{5}}$, soit en cm : $2\dfrac{e^{-2}}{\sqrt{5}}$.

Exercice 7 : Correction

Partie A

1. $g'(x)=e^x-1$ est positive lorsque $x\geq 0$; $g(0)=1-0-1=0$: comme *g* est décroissante avant 0 et croissante après, *g* est toujours positive.

2. Comme $g(x)\geq 0$, on a $e^x-x\geq 1\Rightarrow e^x-x>0$ (ceci montre que *f* est définie sur $\mathbb{R}$).

Partie B

1. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}-1}=\dfrac{1}{+\infty}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}-1}=\dfrac{1}{0-1}=-1$.

b. On a une asymptote horizontale en $-\infty$: $y=-1$ et une autre en $+\infty$: $y=0$.

2. a. $f'(x)=\dfrac{1(e^x-x)-x(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=\dfrac{e^x-x-xe^x+x}{(e^x-x)^2}=\dfrac{(1-x)e^x}{(e^x-x)^2}$.

b. *f'* est du signe de $1-x$.

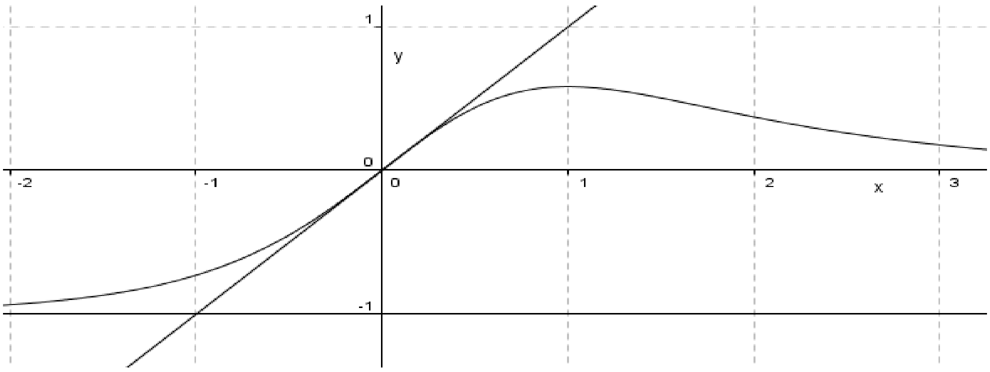
3. a. $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x$.

b. $f(x)-x=\dfrac{x}{e^x-x}-x=\dfrac{x-xe^x+x^2}{e^x-x}=\dfrac{-x(e^x-x-1)}{e^x-x}=\dfrac{-xg(x)}{e^x-x}$.

Comme *g* est positive, ainsi que e^x-x, $f(x)-x$ est du signe de $-x$, soit positif avant 0 (C est au-dessus de T), négatif après (C est en dessous de T).

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		+	0	−	
f	−1	↗	$\dfrac{1}{e-1}$	↘	0

4.



Exercice 8 : Correction

$g(x)=(x+1)^2 e^{-x}$.

1. $g'(x)=2(x+1)e^{-x}+(x+1)^2(-e^{-x})=(x+1)e^{-x}(2-x-1)=(x+1)(1-x)e^{-x}$.

2. a. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} X^2e^{X}=+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty} X^2e^{X}=0$.

C a une asymptote horizontale en +∞.

4. a. Si k < 0, pas de solutions ; si k = 0, une seule solution : x = −1, si 0< k < 4/e, 3 solutions, si k = 4/e : deux solutions dont x = 1, enfin si k > 4/e, une seule solution.

b. Si x > −1, $f(x)$ est toujours inférieur ou égal à 4/e (<2), donc $f(x)$ = 2 n'a pas de solution sur [1 ; +∞[. Lorsque x < −1, f est continue monotone strictement croissante de]−∞ ; −1[vers]0 ; +∞[. Comme 2 est dans cet intervalle, il existe une seule valeur de x pour laquelle $f(x)$ = 2.

Calculons $f(-2)$=7,39 et $f(-1)$=0 ; comme 0 < 2 < 7,39 on a −2 < α < −1.

c. Nous savons que $f(\alpha)=2 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2e^{-\alpha}=2 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2=2e^{\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+1=\sqrt{2e^{\alpha}}\\ \alpha+1=-\sqrt{2e^{\alpha}}\end{cases}$;

comme α < −1 on choisit la racine négative, soit $\alpha=-1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$.