Fonction Exp

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : f(x) = $\frac{2}{e^x + e^{-x}}$

On désigne par Γ la courbe de f dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

1. Etudier les variations de f et Tracer Γ.
2. Pour tout x $\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ on pose g(x) = ln(tg(x)).

   a. Montrer que g est une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

   b. Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(g^{-1})'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Γ et les droites d'équations respectives

   x = 0 , x = $\frac{1}{2}\ln 3$ et y = 0.

Exercice 2: Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : f(x) = $e^{\sqrt{x}}$

1. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

   b. Etudier les variations de f. En déduire que f est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$

   c. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in [1,+\infty[$

   d. Tracer la courbe (C) de f et la courbe (C') de f^{-1} dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$.
2. Pour tout $x \geq 1$ on pose g(x) = $\int_0^{\ln^2(x)} f(t)dt$.

   a. Montrer que f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et que g'(x) = 2ln(x).

   b. En déduire l'expression de g(x) pour tout $x \in [1,+\infty[$.

   c. Déterminer alors l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations x = 0 , x = 4 et y = 0.

Exercice 3 : On considère la fonction f définie sur]0 ; $+\infty$ [par : $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x} - 1\right)$.

1. a. Etudier le sens de variation de f sur]0 ; $+\infty$ [.

   b. Soit (Γ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ et A le point de (Γ) d'abscisse 3. Calculer l'ordonnée de A. Soit B le point de (C) d'abscisse $\frac{5}{4}$,

   q le projeté orthogonal de B sur l'axe $(O;\vec{i})$ et H le projeté orthogonal de B sur l'axe $(O;\vec{j})$.
   Déterminer les coordonnées des points B, q et H. Placer les points A, B, q et H dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et représenter la courbe (Γ).

2.a. Soit l'application $r : P \to P$, $M(z) \to M'(z')$ tq $z' = iz$ caractériser r.

   Déterminer les coordonnées des points A', B' et q' images respectives des points A, B et q par r.

   b. On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-2x} + 2e^{-x}$ et (Γ') sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Montrer que $r(\Gamma) = \Gamma'$

   Tracer sur le graphique précédent les points A', B', P' et la courbe (Γ').

3. a. Calculer l'intégrale $\int_0^{\ln 2} g(x)dx$. Interpréter graphiquement cette intégrale.

   b. Déterminer l'aire $\mathbb{A}$ de la partie du plan limitée par les segments [AO], [OH] , [HB] et l'arc de courbe d'extrémité B et A .

   c. Calculer l'intégrale I = $\int_{\frac{5}{4}}^{3} \ln(\sqrt{1+x} - 1)dx$.

Exercice 4 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + x)e^{-2x}$ et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

A.

1. Etudier les variations de f.
2. Tracer (C).

B. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \int_0^n (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x} dx$

1.a. Montrer que pour tout réel positif t on a : $1-t \le \frac{1}{1+t} \le 1$.

b. En déduire que pour tout réel positif x : $x - \frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x$.

c. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $x - \frac{x^2}{2n} \le n\ln(1+\frac{x}{n}) \le x$

Puis que $e^{x-\frac{x^2}{2n}} \le (1+\frac{x}{n})^n \le e^x$

d. Montrer alors que $\int_0^n e^{-x-\frac{x^2}{2n}} dx \le I_n \le 1-e^{-n}$.

2.a. Etudier le sens de variation de la fonction : $x \to e^{-x}+x-1$ sur $\mathbb{R}_+$.

En déduire que pour tout réel positif x : $1-x \le e^{-x}$.

b. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1-\frac{x^2}{2n} \le e^{-\frac{x^2}{2n}}$.

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\int_0^n e^{-x-\frac{x^2}{2n}} dx \ge \int_0^n (e^{-x} - \frac{x^2}{2n}e^{-x}) dx$

d. Calculer $\int_0^n x^2 e^{-x} dx$, en déduire que : $I_n \ge 1-\frac{1}{n}+(\frac{1}{n}+\frac{n}{2})e^{-n}$.

Montrer alors que la suite (I_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 5 : On note, pour tout nombre réel x strictement positif et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n(x) = \int_0^1 t^n e^{x(1-t)} dt$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{x^{n+1}}{n!}$.

a. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

b. En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq pour tout entier $n \ge n_0$ on a : $a_{n+1} \le \frac{1}{2}a_n$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

2. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \le U_n(x) \le \frac{e^x}{n+1}$.

b. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n(x)$

3. a. Trouver une relation de récurrence entre $U_n(x)$ et $U_{n+1}(x)$.

b. Montrer par récurrence sur n que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $a_n.U_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$