PROBLEME (10 points)

I /1/ Soit la fonction φ définie sur $]0,1[$ par : $\varphi(x) = \text{Log}x - 1 + \dfrac{1}{x}$

Etudier les variations de φ puis déduire que : $\varphi(x) \succ 0$; $\forall x \in\ ]0,1[$

2/ On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par :

$$f(0)=0\ ,\ f(1) = 1 \ \text{ et } \ f(x) = \frac{x-1}{\log x} \text{ si } x \in\ ]0,1[$$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a- Montrer que f est continue en 0 et en 1

b- Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que $f'(x)$ a le même signe que $\varphi(x)$

c- Etudier la derivabilité de f à droite en 0 puis interpréter ce résultat

3/a- Montrer que pour tout $t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ on a : $0 \leq \dfrac{1}{1-t} - (1+t) \leq 2t^2$

b- Déduire que $\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ on a : $0 \leq -Log(1-x) - \left(x + \dfrac{x^2}{2}\right) \leq \dfrac{2x^3}{3}$

4/ Soit g la fonction définie sur $]0,1]$ par: $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$

a- Montrer que pour tout $h \in \left[\dfrac{-1}{2}, 0\right]$ on a : $0 \leq g(1+h) - g(1) + \dfrac{h}{2} \leq \dfrac{2h^2}{3}$

b- En déduire que g est dérivable en 1 et que $g'(1) = -\dfrac{1}{2}$

c- En déduire que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = \dfrac{1}{2}$

5/ Tracer la courbe (C)

II/ Pour tout $x \in\ ]0,1]$, on pose : $I(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt$ et $K(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{f(t)}{t}\,dt$

1/ Montrer que K est dérivable sur $]0,1]$ et que : $k'(x) = \dfrac{1}{x}\left(f(x) - 2f(x^2)\right)$

2/ Montrer que pour tout $x \in\ ]0,1]$ on a : $f(x) - 2f(x^2) = -xf(x)$

3/ En déduire que pour tout $x \in\ ]0,1[$ on a : $I(x) = K(x)$

4/a- Montrer que pour tout $x \in\ ]0,1[$ on a $\displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{-1}{t\text{Log}t}\,dt = Log2$

b- Montrer que pour tout $x \in\ ]0,1[$ et tout $t \in\ ]0,x[$ on a : $0 \leq -\dfrac{1}{\text{Log}t} \leq -\dfrac{1}{\text{Log}x}$

c- En déduire que pour tout $x \in\ ]0,1[$ on a: $0 \leq \left|\displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\text{Log}t}\right| \leq \dfrac{-x}{\text{Log}x}$

puis déduire que : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\text{Log}t} = 0$

d- Déduire de ce qui précede que : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} I(x) = \text{Log}2$

5/ Soit $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$

a- Montrer que pour tout $x \in\ ]0,1]$ on a : $I - I(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$

b- Déduire que : $0 \leq I - I(x) \leq x$

c- Déduire que : $I = \text{Log}2$