22 740 485

Prof: DRISS

Série n°12

40

4ème Maths

Exercice n°1

Etudier les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-\ln^2 x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}+\ln^3 x\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2)+2}{1-2\ln x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\frac{x}{x+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\ln\frac{x}{x+1}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-x^2)}{x^3-x^2}$

Exercice n°2

Soit la fonction $f : x \mapsto (x+1)\ln\left|\frac{x+1}{x}\right| + \frac{1}{x}$

1) Déterminer D_f et étudier les limites suivantes : $\lim\limits_{+\infty} f$; $\lim\limits_{-\infty} f$; $\lim\limits_{-1} f$; $\lim\limits_{0^+} f$; $\lim\limits_{0^-} f$

2) Soit la fonction $g : x \mapsto \ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

Etudier les variations de g. En déduire le signe de g.

3) a)Montrer que f est prolongeable par continuité en -1 et déterminer son prolongement h

b)Etudier la dérivabilité de h en -1

c)Etudier la fonction h et tracer sa courbe représentative (C) dans un plan rapporté à un repère ON$(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice n°3

Pour tout n de IN*, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$ et $v_n = \int_0^1 \frac{n\,t^n}{1+t^n}dt$

1) a) Calculer u_1 et vérifier que : $v_n + n\,u_n = n$

b) Montrer que ; $\forall\, t \geq 0$, on a : $1 - t^n \leq \frac{1}{1+t^n} \leq 1$. En déduire que : $1 - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq 1$, $\forall n \in$ IN*

c) Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

2) a) En écrivant $\frac{n\,t^n}{1+t^n}$ sous la forme $\frac{n\,t^{n-1}\,t}{1+t^n}$, montrer, à l'aide d'une intégration par parties que

$v_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt$

b) Montrer que ; $\forall\, x \geq 0$, on a : $0 \leq \ln(1+x) \leq x$. En déduire que : $0 \leq \int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt \leq \frac{1}{n+1}$

c) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, en déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-u_n) = \ln 2$

Problème

I) Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par : $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

1) Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère ON

2) Soit g la fonction numérique à variable réelle définie par : $g(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

Montrer que sa courbe représentative (C') et la courbe (C) de f sont symétriques par rapport au point $\Omega\left(-\frac{1}{2},0\right)$.Construire (C')

3) Soit k un réel strictement positif, calculer $\int_1^k \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)dx$. Donner l'expression de $\int_1^k f(x)\,dx$

II) 1) Soit m un réel strictement positif

a) Montrer que l'on a : $\frac{1}{m+1} \leq \int_m^{m+1}\frac{dx}{x} \leq \frac{1}{m}$, en déduire que : $\frac{1}{m+1} \leq \ln\left(\frac{m+1}{m}\right) \leq \frac{1}{m}$

b) Montrer que : $0 \leq f(m) \leq \frac{1}{m(m+1)}$

2) Pour tout n de IN*-{1},on pose $\alpha_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\dots+\frac{1}{n}$; $\beta_n = \ln n$; $\gamma_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\dots+\frac{1}{n-1}$

a) Montrer que ; $\forall n \in$ IN*-{1} on a : $\alpha_n \leq \beta_n \leq \gamma_n$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(\gamma_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)$

$x\ln\frac{x}{x+1}$

3) On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $IN^*-\{1\}$ par :

$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n-1} - \ln n$ et $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \ln n$

a) Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante

b) Montrer que ; $\forall\, n \in IN^*-\{1\}$ on a : $0 \leq u_n \leq v_n \leq 1$

c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite l qui appartient à $]0\,;1[$

III) 1) a) Pour tout n de IN^* on pose $S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n(2n+1)}$

En utilisant : $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$; simplifier l'expression de S_n. Montrer que la suite (S_n) est convergente et calculer sa limite

b) Montrer que : $0 \leq f(n) + f(n+1) + f(n+2) + \ldots\ldots\ldots + f(2n) \leq S_n$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} [f(n) + f(n+1) + f(n+2) + \ldots\ldots\ldots + f(2n)]$

2) On définit la suite (w_n) sur IN^* par : $w_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots\ldots + \frac{1}{2n}$

Vérifier que : $f(n) + f(n+1) + f(n+2) + \ldots\ldots\ldots + f(2n) = w_n - \ln 2 - \ln\left[1 + \frac{1}{2n}\right]$

Déduire que la suite (w_n) est convergente et donner sa limite

3) Pour tout n de IN^* on pose $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots\ldots\ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$

a) Calculer : $I_1 = \int_0^1 (1-t)\,dt$ et $I_k = \int_0^1 (t^{2k-2} - t^{2k-1})\,dt$, $\forall\, k \geq 2$.

En déduire que : $a_n = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots\ldots\ldots + I_n = \int_0^1 \left(\frac{1 - t^{2n}}{1+t}\right) dt$

b) Montrer que: $\left| a_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t} \right| \leq \frac{1}{2n+1}$. En déduire que (a_n) est convergente et donner sa limite

c) Montrer par récurrence que : $\forall n \in IN^*$ on a : $a_n = w_n - \frac{1}{n}$

Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t}$ et retrouver la limite de la suite (w_n)