

Exercices d'arithmétiques

Exercice n°1 :

Pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 5, on considère les nombres

$$a = n^3 - n^2 - 12n \text{ et } b = 2n^2 - 7n - 4$$

1°) Montrer que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n - 4$.

2°) On pose $\alpha = 2n + 1$; $\beta = n + 3$. On note d le p.g.c.d de α et β .

a- Etablir une relation entre α et β indépendante de n

b- Démontrer que d est un diviseur de 5.

c- Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si, $n - 2$ est multiple de 5.

3°) Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.

4°) a- Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n le pgcd de a et b

b- Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

Exercice n°2 :

1-Etablir que pour tout $(a,b,q) \in \mathbb{Z}^3$, $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(b,a-bq)$

2-Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\text{pgcd}(5n^3-n,n+2) = \text{pgcd}(n+2,38)$

3-Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $(n+2)$ divise $(5n^3-n)$

4-Quelles sont les valeurs possible de $\text{pgcd}(5n^3-n,n+2)$?

Déterminer l'ensemble des entiers n tel que $\text{pgcd}(5n^3-n,n+2)$

Exercice n°3

Soit n un entier premier différent de 2. On considère les entiers naturels a et $b = n^3 + 1$ et on désigne par d le pgcd (a,b)

$$\text{et } a = (n+1)^2$$

1-a-Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, b = (n+1)^2 (n-2) + 3(n+1)$

b-Démontrer que $d = n+1$ ou $d = 3(n+1)$

2-a-Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait $70a - 13b = 8$

b-Montrer alors que la seule valeurs possible de n est 7

Exercice n°4 :

Soit $a = 11n + 3$ et $b = 13n - 1$

1°) Montrer que tout division de a et b est un diviseur de 50.

2°) Résoudre dans \mathbb{N}^2 , l'équation $50x - 11y = 3$. En déduire les valeurs de n pour lesquelles les nombres a et b ont 50 pour pgcd.

3°) Pour quelles valeurs de n les nombres a et b ont-ils 25 pour plus grand commun diviseur.

Exercice n° 5:

1°) Recomposer 319 en facteurs premiers

2°) Démontrer que si x et y sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même pour $3x + 5y$ et $x + 2y$

3°) Résoudre dans \mathbb{N}^2 le système
$$\begin{cases} (3a + 5b)(a + 2b) = 1276 \\ ab = 2m \end{cases}$$
 où m désigne le ppcm de a et b .

Exercice n° 6 :

1°) Si deux entiers naturels sont premiers entre eux, montrer qu'il en est de même de leur somme et de leur produit (ind : Supposer que $x + y$ et xy ne sont pas premiers entre eux).

2°) En déduire l'ensemble des paires $\{a, b\}$ d'entiers naturels tels que
$$\begin{cases} a + b = 96 \\ PPM(a, b) = 180 \end{cases}$$

Exercice n°7-Bac Tunisie 1992

1) On considère dans \mathbb{Z}^2 l'équation : $(E_1) : 11x + 8y = 79$

a- Montrer que si (x, y) est solution de (E_1) alors $y \equiv 3 \pmod{11}$

b- Résoudre alors l'équation (E_1)

2) Soit dans \mathbb{Z}^2 l'équation : $(E_2) : 3y + 11z = 372$.

a- Montrer que si (y, z) est solution de (E_2) alors $z \equiv 0 \pmod{3}$

b- Résoudre alors l'équation (E_2) .

3) Résoudre dans \mathbb{Z}^2 , l'équation : $(E_3) : 3x - 8z = -249$.

4) Le prix total de 41 pièces détachées, réparties en trois lots, est de 480 dinars.

Le prix d'une pièce du premier lot est de 48 dinars.

Le prix d'une pièce du deuxième lot est de 36 dinars.

Le prix d'une pièce du troisième lot est de 4 dinars.

Déterminer le nombre de pièces de chaque lot.

Exercice n°8 Bac Tunisie 1993

Soit p un entier relatif différent de 1 et n un entier naturel non nul.

On pose $S = 1 + p + p^2 + \dots + p^{n-1}$

1) a- Ecrire S sous la forme d'un quotient.

b- Calculer l'expression $p^n + (1 - p)S$ et en déduire que p^n et $(1 - p)$ sont premiers entre eux.

2) a- Résoudre, dans \mathbb{Z}^2 l'équation : $p^n x - (1 - p)y = p$.

b- En déduire dans \mathbb{Z}^2 , les solutions de l'équation : $10^n + 2^{n+2}y - 10 \cdot 2^{n-1} = 0$

Exercice n°9

Trouver les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $0 < a < b$ dont le PGCD d et le PPCM m vérifient $2m + 3d = 78$ et tels que a ne soit pas un diviseur de b .

Exercice n°10

Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $\text{PGCD}(a, b) + \text{PPCM}(a, b) = b + 9$.