Arithmétiques

Exercice 1 :

1. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise 6.
2. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $n + 2$.
3. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n + 1$ divise $3n - 4$.

Exercice 2 :

1. Discuter, suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de 4^n modulo 7.
2. quel le reste de la division euclidienne du nombre 32^{45} par 7 ?

Exercice 3 :

1. Discuter, suivant les valeurs de l'entier naturel p , le reste de 5^p modulo 13.
2. En déduire que pour tout $n\in \mathbb{N}^*$, le nombre $31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Exercice 4 :

Montrer que pour entier naturel non nul n, $(n+1)^n-1$ est divisible par n^2

Exercice 5 :

Montrer que si a et b sont deux entiers non divisible par 3, alors $a^6 - b^6$ est divisible par 3.

Exercice 6 :

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = 1\ ;\ x_{n+1} = \dfrac{7}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n + 1 \\ y_0 = 8\ ;\ y_{n+1}\ \dfrac{20}{3}x_n + \dfrac{8}{3}y_n + 5 \end{cases}$$

1. Montrer que les points $M_n(x_n, y_n)$ sont sur la droite $\Delta : 5x - y + 3 = 0$.
En déduire que $x_{n+1} = 4x_n + 2$.
2. Montrer que tous les nombres x_n sont des entiers naturels.
En déduire que les nombres y_n sont aussi des entiers naturels.
3. Montrer que :
a. x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.
b. si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3 alors ils sont premiers entre eux.

4. a. Montrer que $x_n = \dfrac{1}{3}(5\times 4^n - 2)$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $(5\times 4^n - 2)$ est un multiple de 3.

Exercice 7 :

Déterminer tous les entiers a et b tels que :
1) $ab \equiv 1[5]$.
2) $ab \equiv 0[4]$.

Exercice 8 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 \equiv 1[8]$.

Exercice 9 :

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $4^n \equiv 1[3]$

2. Prouver que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.

3. a. Pour $1 \le n \le 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17.

b. En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.

4. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?

5. Déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

6. Soit p un nombre premier différent de 2.

a. Démontrer qu'il existe un entier $n \ge 1$ tel que $4^n \equiv 1[p]$.

b. Soit $n \ge 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1[p]$ .On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1[p]$ et r le reste de la division euclidienne de n par b.

c. Démontrer que $4^r \equiv 1[p]$. En déduire que r = 0.

d. Prouver l'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b.

e. En déduire que b divise $p - 1$.

Exercice 10 :

1. a. Montrer que si $a \in \{2,3,4,5\}$ alors $a^6 \equiv 1[7]$.

   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$. Montrer que $A_n \equiv A_{n+6}[7]$.

2. On note r le reste de la division euclidienne de n par 6.

   a. Montrer que $A_n \equiv A_r[7]$.

   b. Déterminer les valeurs de n pour que $A_n \equiv 0[7]$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $B_n = 100^n + 101^n + 102^n + 103^n$.

   a. $B_n \equiv A_n[7]$.

   b. Déterminer les valeurs de n pour que $B_n \equiv 0[7]$.

Exercice 11 :

1. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^3 - 11n + 48$ est divisible par n + 3.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.

2. Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls a, b et c, PGCD(a ; b) = PGCD(bc − a ; b).

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2 :

$$\text{PGCD}(3n^3 - 11n \,;\, n + 3) = \text{PGCD}(48 \,;\, n + 3).$$

4. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\dfrac{3n^3 - 11n}{n+3}$ soit un entier naturel.