Exercice (1 heure)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{u};\vec{v})$. L'unité graphique est 4cm.

On considère les points A,B,C et D d'affixes respectives :

$$a=1\ ;\ \ b=e^{i\frac{\pi}{3}}\ ;\ \ c=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\qquad ;\ \ d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

1.
   a) Donner la forme exponentielle de c et la forme algébrique de d
   b) Représenter les points A, B, C et D.
2. Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude plane directe s de centre 0 qui transforme A en C.
3. On note F et G les images par la similitude directe s des points D et C respectivement.
   Montrer que les points F, C et G sont alignés.
4. On considère la transformation φ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=e^{-i\frac{2\pi}{3}}\overline{z}+\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$
   Pour toute droite δ du plan, on notera σ_δ, la réflexion d'axe δ
   a) Soit r la transformation qui, à tout point M_1 d'affixe z_1, associe le point M'_1 d'affixe z'_1 telle que : $z'_1=e^{-i\frac{2\pi}{3}}z_1+\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$
   Déterminer la nature de r et donner ses éléments caractéristiques.
   Exprimer r sous sa forme complexe simplifiée en faisant apparaître l'affixe de son centre.

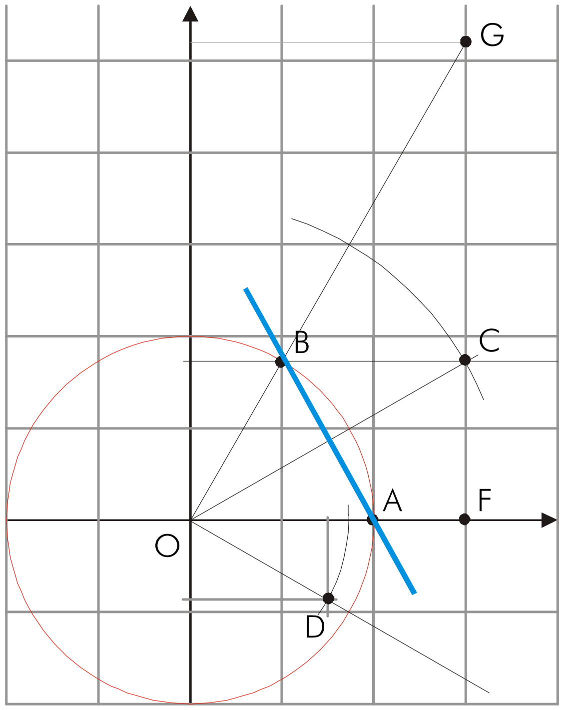
   b) Exprimer φ sous la forme d'une composée de deux transformations que l'on déterminera.
   c) Déterminer deux points invariants de φ et en déduire la nature de φ.
   d) Déterminer graphiquement $\varphi(C)$.

Correction

1a.

$c=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ $\lvert c\rvert=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$ $c=\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$	$d=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})\right)$ $d=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\overline{c}}{2}$

1b.



2.
On a $s(0) = 0$ et $s(A) = C$
s est de la forme $z' = mz + p$

En remplaçant : $\begin{cases} 0 = m\times 0 + p \\ \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = m\times 1 + 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 0 \\ m = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \end{cases}$ donc s de la forme : $z' = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}z$

s est un SD de centre O, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

3.

Les points F, G et C sont alignés, si et seulement si l'angle $(\vec{FG};\vec{FC}) = k\pi$ avec k relatif, autrement dit, si $\arg\left(\frac{z_C - z_F}{z_G - z_F}\right) = k\pi$ ou si $\frac{z_C - z_F}{z_G - z_F}$ est un nombre réel.

$z_C = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $z_F = z_D' = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}z_D = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{2}$ et

$z_G = z_C' = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}z_C = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \times \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = 3e^{i\frac{\pi}{3}} = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

On remarque que les points F, C et G ont même abscisse, donc ils sont tous sur la droite d'équation $x = \frac{3}{2}$

Dans le cas où on ne s'en serait pas aperçu, on continue et

$$\frac{z_C - z_F}{z_G - z_F} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{3\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1}{3}$$

Les points F, G et C sont donc alignés.

4a.

$r : z_1 \mapsto z_1' = e^{-i\frac{2\pi}{3}} z_1 + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Cherchons un éventuel point invariant :

ω invariant par r si et seulement si :

$$\omega = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \omega + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \Leftrightarrow \omega = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \omega + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$\Leftrightarrow \omega \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \Leftrightarrow \omega \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \Leftrightarrow \omega = 1 = z_A$$

r est donc la rotation de centre A, d'angle $-\frac{2\pi}{3}$

Sa forme complexe est $z_1' - 1 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} (z_1 - 1)$

4b.

Il est clair que φ est de la forme : $\varphi : z \overset{\sigma_{(OA)}}{\mapsto} \overline{z} = z_1 \overset{r}{\mapsto} z'$, on a donc $\varphi = r \circ \sigma_{(OA)}$ où $\sigma_{(OA)}$ est la réflexion d'axe (OA).

4c.

Il est clair que A est invariant par $\sigma_{(OA)}$ et par *r*, donc par φ

Calculons φ(B) :

$$z_B' = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \overline{z}_B + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} e^{-i\frac{\pi}{3}} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\pi} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -1 + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = z_B$$

A et B sont invariants par φ, qui admet donc au moins deux points invariants, d'après le cours, φ est soit l'identité (ce qui n'est pas le cas), soit une réflexion. En l'occurrence, c'est la réflexion d'axe (AB).

Graphiquement, φ(C) = O.