Exercices Arithmétiques -4$^{\text{ième}}$ Maths

Exercice n°1:

1- Déterminer le reste dans la division euclidienne de 3^5 par 11

2- En déduire que pour tout entiers q et r : $3^{5q+r} \equiv 3^r \left[11\right]$

3- n étant un entier naturel ,quels sont les restes possibles de 3^n par 11

4- Trouver pour quelles valeurs de n , 3^n +7 est divisible par 11

Exercice n°2:

I) Soit l'équation (E) : 70x-13y=8.

1- Déterminer un couple (u,v) d'entiers tel que 70u-13v=1.

2- En déduire une solution particulière de (E) puis la résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

II) Soient a et b les entiers naturels définis par a = $(p+1)^2$ et b = p^3 +1 où p est un entier premier différent de 2 .

1- On suppose que (a,b) est solution de (E) .Montrer que $a \equiv 12\left[13\right]$.

2- On pose d = pgcd(a,b) .

a- Justifier que d divise 8

b- Vérifier que $p^3+1 = (p+1)^2(p-2) + 3(p+1)$.En déduire que d = pgcd ($(p+1)^2$,3(p+1)) puis que d = p+1 ou d = 3(p+1) .

c- Prouver que d ne peut pas être égale à 3(p+1) puis en déduire les valeurs possibles de p

d- Montrer que la seule valeur possible de p est 7.

Exercice n°3 :

1. On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs *N* tels que $\begin{cases} N \equiv 5\left[13\right] \\ N \equiv 1\left[17\right] \end{cases}$.

a. Vérifier que 239 est solution de ce système.

b. Soit *N* un entier relatif solution de ce système.

Démontrer que *N* peut s'écrire sous la forme $N = 1+17x = 5+13y$ où *x* et *y* sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.

c. Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où *x* et *y* sont des entiers relatifs.

d. En déduire qu'il existe un entier relatif *k* tel que $N = 18 + 221k$.

e. Démontrer l'équivalence entre $N \equiv 18\left[221\right]$ et $\begin{cases} N \equiv 5\left[13\right] \\ N \equiv 1\left[17\right] \end{cases}$.

2. a. Existe-t-il un entier naturel *k* tel que $10^k \equiv 1\left[17\right]$?

b. Existe-t-il un entier naturel *l* tel que $10^l \equiv 18\left[221\right]$?

Exercice n°4 :

1- Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que PGCD($a + b$; ab) = p, où p est un nombre premier.

a. Démontrer que p divise a^2. (On remarquera que $a^2 = a(a+b) - ab$).

b. En déduire que p divise a.

On constate donc, demême, que p divise b.

c. Démontrer que PGCD(a ; b) = p.

2- On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$.

a. Résoudre le système $\begin{cases} \text{PGCD}(a\,;b) = 5 \\ \text{PPCM}(a\,;b) = 170 \end{cases}$.

b. En déduire les solutions du système : $\begin{cases} \text{PGCD}(a+b\,;ab) = 5 \\ \text{PPCM}(a\,;b) = 170 \end{cases}$.

Exercice n°5 :

Soit A l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle $[1,46]$.

1. On considère l'équation (E) : $23x + 47y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière (x_0, y_0) de (E).

b. Déterminer l'ensemble des couples (x, y) solutions de (E).

c. En déduire qu'il existe un unique entier x appartenant à A tel que $23x \equiv 1\ (47)$.

2. Soient a et b deux entiers relatifs.

a. Montrer que si $ab \equiv 0\ (47)$ alors $a \equiv 0\ (47)$ ou $b \equiv 0\ (47)$.

b. En déduire que si $a^2 \equiv 1\ (47)$ alors $a \equiv 1\ (47)$ ou $a \equiv -1\ (47)$.

3. **a.** Montrer que pour tout entier p de A, il existe un entier relatif q tel que $p \times q \equiv 1\,(47)$.

Pour la suite, on admet que pour tout entier p de A, il existe un unique entier, noté $inv(p)$, appartenant à A tel que $p \times inv(p) \equiv 1\,(47)$.

Par exemple :

$inv(1) = 1$ car $1 \times 1 \equiv 1\ (47)$, $inv(2) = 24$ car $2 \times 24 \equiv 1\ (47)$, $inv(3) = 16$ car $3 \times 16 \equiv 1\ (47)$ ...

b. Quels sont les entiers p de A qui vérifient $p = inv(p)$?

c. Montrer que $46! \equiv -1\,(47)$.