Exercices d'arithmétiques corrigés

Exercice N°1 :

1-Etablir que pour tout $(a,b,q)\in \mathbb{Z}^3$,pgcd(a,b) = pgcd(b,a-bq)

2-Montrer que pour tout $n\in \mathbb{Z}$, pgcd($5n^3$-n,n+2) = pgcd(n+2,38)

3-Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que (n+2) divise ($5n^3$-n)

4-Quelles sont les valeurs possible de pgcd($5n^3$-n,n+2) ?

Déterminer l'ensemble des entiers n tel que pgcd($5n^3$-n,n+2)

Correction :

1-Posons d = pgcd(a,b)

On a si d divise a et d divise b alors d divise b et d divise (a-bq)

Réciproquement : si d divise b et d divise (a-bq) alors d divise (a – bq) +bq = a

2- c'est la relation précédente avec a = $5n^3$-n et et b = n+2 ; q = $5n^2 – 10n +19$

3-(n+2) divise ($5n^3$-n) équivaux (n+2) divise 38 équivaux $n\in\{-40, -21 , -4 , -3 , -1 , 0 , 17 ; 36\}$

4- Les valeurs possibles du pgcd($5n^3$-n,n+2) sont les diviseurs possible de 38

Donc pgcd($5n^3$-n,n+2)= 19 $\Leftrightarrow$ n+2 = 19k avec k = 2p +1 donc n = 38p +17 $p \in\mathbb{Z}$

Si k = 2p alors pgcd($5n^3$-n,n+2) = 38

Exercice N°2 :

Soit n un entier premier différent de 2 .On considère les entiers naturels et a = $(n+1)^2$ et b = n^3+1 et on désigne par d le pgcd (a,b)

1-a-Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}, b = (n+1)^2(n-2)+3(n+1)$

b-Démontrer que d=n+1 ou d= 3(n+1)

2-a-Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait 70a-13b=8

b-Montrer alors que la seule valeurs possible de n est 7

Correction :

n est un entier naturel premier différent de 1.posons d= pgcd (a,b)

1-a-on a : $n^3+1 = (n+1)(n^2-n+1)$

$$= (n+1)(n^2-n-2+3)$$

$$= (n+1)((n+1)(n-2)+3))$$

$$= (n+1)^2(n-2)+3(n+1)$$

b-on a:

d= pgcd($(n+1)^2, n^3+1)) = p\,\mathrm{gcd}((n+1)^2, 3(n+1))$

$$= (n+1)\,p\,\mathrm{gcd}((n+1),3)$$

Or le pgcd(n+1,3)=1 ou pgcd(n+1,3)=3

Donc d=n+1 ou d=3(n+1)

2-si d=n+1 alors n+1/a et n+1/b donc n+1/8 et par suite

n+1 $\in \{1,2,4,8\}$ d'où n=3 ou n=7 or 70x16-13x28 8 donc 3 ne convient pas ;

D'autre part $70(7+1)^2 - 13\times(7^3+1) = 8$

Donc 7 convient

si d=3(n+1) alors 3(n+1)/a 3(n+1)/b donc 3(n+1)/8 ceci est impossible car pdcd(3,8)=1 ainsi la seule valeur de n est 7

Exercice N°3 :

1-a-Pour $1\leq n\leq 6$, calculer les restes de la divisions euclidienne de 3^n par 7.

b-Démontrer que pour tout n $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.En déduire que 3^{n+6} et 3^n ont le même reste dans la division euclidienne par 7

c-A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} par 7

d-De manière générale, comment peut –on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7,pour n quelconque ?

e-En déduire que, pour tout entier naturel n , 3^n est premier avec 7

2-Soit $u_n = 1+3+3^2+\ldots+3^{n-1}$

a-Montrer que $u_n = \frac{1}{2}(3^n-1)$

b-Déterminer les valeurs de n telles que u_n soit divisible par 7

c-Déterminer tous les diviseurs de u_6

Correction :

1-a-$3^0 = 1 \equiv 1 \pmod 7$

$3^1= 3 \equiv 3 \pmod 7$

$3^2 =9\equiv 2 \pmod 7$

$3^3 = 3\text{x}2\equiv 6 \pmod 7$

$3^4 \equiv 4 \pmod 7$

$3^5 \equiv 5 \pmod 7$

$3^6 \equiv 1 \pmod 7$

b-$3^{n+6} - 3^n = 3^n(3^6-1)$ or $3^6 \equiv 1 \pmod 7$ donc $3^6 - 1$est divisible par 7 donc $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7 et par suite $3^{n+6} - 3^n\equiv 0 \pmod 7$ donc 3^{n+6} et 3^n ont le même reste dans la division euclidienne par 7

c-On a 1000 = 6x166+4 donc $3^{1000} = (3^6)^{166}\text{ x}3^4$: comme $3^6 \equiv 1 \pmod 7$ et $3^4 \equiv 4 \pmod 7$ on aura alors $3^{1000}\equiv 4 \pmod 7$

d-En divisant n par 6 on a une partie qui sera congrue à 1 et l'autre partie tombera dans les restes calculer au 1-a e-En aucun cas on ne peut trouver un reste nul de 3^n par 7 c'est à ,dire 7 ne divise pas 3^n et 7 est premier donc 3^n et 7 sont premier entre eux

2-a-u_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison 3 donc

$u_n = \frac{1}{2}(3^n-1)$

b- u_n est divisible par 7 lorsque $(3^n-1) \equiv 0(\bmod 7)$ c-à-d $3^n \equiv 1 \ (\bmod 7)$ soit lorsque n est un multiple de 6 donc n =6k ; $k\in\mathbb{N}^*$

c-$u_6 = \frac{1}{2}(3^6-1) = \frac{1}{2}(3^3-1)\ (3^3+1)=2^2x7x13$ tous les diviseurs de u_6 sont : 2 , 4 ,7 , 13

14 , 26 , 28 , 52 , 91,

Exercice N°4 :

1-Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation 3u-8v=6

2-En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ du système $\begin{cases} x \equiv 1[3] \\ x \equiv 7[8] \end{cases}$

Correction :

1-3u-8v=6 (1) et posons d =pgcd(3,8)

On a d=1 donc l'ensemble des solutions de (1) n'est pas vide et on a 3(-6) -8(-3)=6 (2) donc le couple (-6,-3) est une solution particulière de (1)

D'où en faisant la différence membre à membre entre (1) et (2) on obtient 3(u+6)=8(v+3)

Et on a 3/8(v+3) et d= 1 donc 3/v+3;d'où il existe

k ∈ $\mathbb{Z}$ tel que v+3=3k et par suite u+6 = 8k

Les solutions de (1) sont les couples

(u,v) $\in \left\{(8k-6, 3k-3); k\in\mathbb{Z}\right\}$

2- $x \equiv 1\left[\ 3\ \right] \Leftrightarrow x = 3u+1; u\in\mathbb{Z}$ $\quad x \equiv 7\left[\ 8\ \right] \Leftrightarrow x = 8v+1; v\in\mathbb{Z}$

D'où 3u+1=8v+7 ce qui signifie 3u-8v=6

CONCLUSION:

En remplaçant u ou v par sa valeur dans l'expression de x on obtient x=24k-17 k∈,$\mathbb{Z}$

Exercice N°5 :

On pose *a* = 1234 et *b* = 1200.

a: Déterminez le PGCD *d* et le PPCM *m* de *a* et *b*.

b: (E) est l'équation dans $\mathbf{Z}^2$: $ax + by = 2d.m$

Donnez une solution évidente de cette équation.

Déterminez l'ensemble des solutions de (E).

Correction :

$a = 1234$ et $b = 1200$.

a: PGCD et PPCM

Pour déterminer le PGCD de a et b, on peut tout aussi bien décomposer ces deux entiers en facteurs premiers ou utiliser l'algorithme d'Euclide.

1234 = 2x617 (617 est premier)

$1200 = 2^4 x3x5^2$.

Donc PGCD(1234 , 1200) = 2 et PPCM(1234 , 1200) = 2^4x3x5^2x617 = 740400.

Avec l'algorithme d'Euclide, on a:

1234 = 1200x1 + 34

1200 = 35x34 + 10

34 = 3x10 + 4

10 = 2x4 + 2

4 = 2x2. Dernier reste non-nul , R = 2. Donc PGCD(1234 , 1200) = 2.

De plus, on sait que PGCD(a , b).PPCM(a , b) = ab.

On a donc : PGCD(1234 , 1200) = (1234x1200)/2 = 740400.

b: (E) : $ax + by = 2dm$

On sait que $dm = ab$. Donc on a une solution évidente de (E), à savoir le couple (a , b).

Comme $a = Ad$ et $b = Bd$ avec A et B premiers entre eux, l'équation (E) peut s'écrire:

(E) : $Ax + By = 2m$

Comme (a , b) est une solution particulière, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E) est formé des couples ($a + Bk$, $b - Ak$) où $k \in \mathbf{Z}$.

Dans le cas de a = 1234 et b = 1200 , on a A = 617 et B = 600.

L'ensemble des solutions de (E) s'écrit alors : (617 + 1200k , 1200 - 1234k) , $k \in \mathbf{Z}$.

Exercice 6 :Bac Tunisie 1992

1-On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E_1)\ :\ 11x + 8y = 79$

a-Montrer que si (x, y) est solution de (E_1) alors $y \equiv 3\ [11]$

b-Résoudre alors l'équation (E_1)

2-Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E_2)\ :\ 3y + 11z = 372$.

a-Montrer que si (y, z) est solution de (E_2) alors $z \equiv 0\ [3]$

b-Résoudre alors l'équation (E_2).

3-Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$, l'équation : $(E_3)\ :\ 3x - 8z = -249$.

4-Le prix total de 41 pièces détachées, réparties en trois lots, est de 480 dinars.

Le prix d'une pièce du premier lot est de 48 dinars.

Le prix d'une pièce du deuxième lot est de 36 dinars.

Le prix d'une pièce du troisième lot est de 4 dinars.

Déterminer le nombre de pièces de chaque lot.

Correction :

On a $11x + 8y = 79$

8y-79=-11x donc $11 / 8y - 79$

donc : $8y - 79 \equiv 0\,[11]$ sig $8y \equiv 79\,[11] \Leftrightarrow 8y \equiv 2\,[11] \Leftrightarrow 56y \equiv 14\,[11] \Leftrightarrow y \equiv 3\,[11]$

b- $y \equiv 3\,[11] \Leftrightarrow y = 3 + 11k, k \in \mathbb{Z}$

$11x + 8.(3 + 11k) = 79 \Leftrightarrow 11(x+8k) = 55 \Leftrightarrow 11(x+8k-55) = 0$

$\Leftrightarrow x = 5-8k, k\in\mathbb{Z}$ donc $S_{\mathbb{Z}^2} = \{(5-8k, 3+11k), k\in\mathbb{Z}\}$

2-a-(E_2) : $3y+11z = 392 \Leftrightarrow 11z = -3y+392 = 3(124-y) \Leftrightarrow 3/11z$; 3 et 11 sont premier entre eux donc $3/z$ et par suite $z\equiv 0 \pmod 3$

b- $z\equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow z = 3k'$, $k'\in\mathbb{Z}$; $3y+3.11k' = 392 \Leftrightarrow$

$3(y+11k') = 372 \Leftrightarrow y+11k' = 124 \Leftrightarrow y = 124-11k'$, $k'\in\mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{Z}^2} = \{(124-11k', 3k'), k'\in\mathbb{Z}\}$

3°) $3x - 8z = -249 \Leftrightarrow 3x + 249 = 8z \Leftrightarrow 3(x + 8z) = 8z$

$\Rightarrow 8 / 3(x + 8z)$

$\Rightarrow 8 / x + 8z \Rightarrow x + 8z = 8k''$

$3.(8b'' - 8z) - 8z = -249$

$\Rightarrow 8(3k'' - z) = -249 + 249 = 0 \Rightarrow z = 3k''$

$S_{n^2} = \{(8k''- 8z , k''), k'' \in Z\}$

4°) Soit x le nombre de pièces du lot 1

Soit y le nombre de pièces du lot 2

Soit z le nombre de pièces du lot 3

On a $x + y + z = 41$ (1)

et $48x + 36y + 4z = 480$ soit $12x + 9y + z = 120$ (2)

En remplaçant z par $41 - x - y$ dans (2) on obtient.

$11x + 8 = 79$ c'est l'équation (E_1).

Remarque : en remplaçant x en fonction de y et z dans (2) on obtient l'équation (E_2) et en remplaçant y en fonction de x et z tire de (1) dans (2) on obtient l'équation (E_3) d'où $x = 5 - 8k$, y=3+11k et puisque x est le nombre de pièce donc $x \in N^*$ donc $5 - 8k > 0 \Leftrightarrow k = 0$

Pour $k = 0$ on obtient $x = 5$ et $y = 3$ et par suite $z = 41 - (x + y) = 41 - 8 = 33$.

Exercice 7 Bac Tunisie 1993

Soit p un entier relatif différent de 1 et n un entier naturel non nul.

On pose $S = 1 + p + p^2 + ... + p^{n-1}$

1-a- Ecrire S sous la forme d'un quotient.

b- Calculer l'expression $p^n + (1 - p)S$ et en déduire que p^n et $(1 - p)$ sont premiers entre eux.

2-a- Résoudre, dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $p^n x - (1 - p)y = p$.

b- En déduire dans $\mathbb{Z}^2$, les solutions de l'équation : $10^n + 2^{n+2}y - 10.2^{n-1} = 0$

Correction :

p un entier relatif différent de 1 et n un entier naturel non nul.

$S = 1 + p + p^2 + ... + p^{n-1}$

1°) a- on a S est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $q = p$

donc : $S = \frac{1-p^n}{1-p}$

b- Calculons l'expression $p^n + (1-p)S$

$$p^n + (1-p)S = p^n + (1-p)\left(\frac{1-p^n}{1-p}\right) = p^n + 1 - p^n = 1$$

on a $p^n + (1-p)S = 1$, d'après Bizout pour le couple $(1, S)$ on a $1.p^n + (1-p)S = 1$ donc p^n et $(1-p)$ sont premiers entre eux.

2°) a- soit (E) : $p^n x - (1-p)y = p$ (1)

on a : $p^n + (1-p)S = 1$

$\Rightarrow p.p^n + (1-p)pS = p$ (2)

le couple $(p, -pS)$ est une solution particulière de (E).

$(1) - (2) \Rightarrow p^n(x-p) - (1-p)(y+pS) = 0$

$\Rightarrow p^n(x-p) = (1-p)(y+pS)$

$\Rightarrow (1-p)/\ p^n\ (n-p)$ et $(1-p)$ et p^n sont premiers entre eux donc $x - p\ /\ 1-p$.

$\Rightarrow x - p = k(1-p), k \in 22$

$\Rightarrow x = p + k(1-p)$

en remplaçant x dans (E) on aura :

$p^n(p + (1-p)k) - (1-p)y = p$

$\Rightarrow (1-p)\left(p^n k - y\right) = p - p^{n+1} = p(1-p^n)$

$\Rightarrow p^n k - y = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$

$\Rightarrow p^{n}k - y = pS$

$\Rightarrow y = -pS + kp^{n}, \quad k \in 22$

$S_{n^2} = \left\{\left(p + k(1-p), -pS + kp^{n}\right), k \in 22\right\}$

b- Soit $(E') : 10^{n}x + 2^{n+2}y - 10.2^{n-1} = 0$

$\Rightarrow 10^{n}x + 2^{n+2}y = 10.2^{n-1}$ division le tout par 2^{n} on aura :

$5^{n}x + 4y = 5$

$\Rightarrow 5^{n}x - (1-5)y = 5$ c'est (E) avec $p = 5$ d'où les solutions de (E') sont les couples

$\left(5 - 4k ; -5S + 5^{n}k\right), k \in 22$

$$S = \frac{1-5^{n}}{1-5} = \frac{5^{n}-1}{4}$$