4° Maths

Exercice n°1 :

Soient les entiers a=$5n^3-n$ et b = n+2

1- Vérifier que : $5n^3-n$ =(n+2)($5n^2$-10n+19)-38
2- Déduire que pgcd(a,b)=pgcd(n+2,38)
3- En déduire les valeurs possibles du pgcd(a,b)
4- Déterminer les entiers tels que pgcd(a,b)=19

Exercice n°2 :

1- Soit N = $\frac{n+9}{n-4}$ .Déterminer n pour que N soit un entier naturel
2- On pose n = u +6
   a- Exprimer N en fonction de u
   b- Montrer que si N est réductible par un entier r alors $r\equiv 0[15]$
   c- En déduire les valeurs de n pour que N soit irréductible

Exercice n°3 :

Soit n un entier naturel non nul.

1- Montrer que $2n^2+1$ et n sont premiers entre eux
2- Montrer que $2n^2+1$ et n^2+1 sont premiers entre eux
3- En déduire que la fraction : $\frac{n^3+n}{2n^2+1}$ est irréductible

Exercice n°4 :

Soit n un entier relatif différent de –2.

1°) Développer l'expression : $(n+2)(2n-1)$

2°) Démontrer que les nombres $n+2$ et $2n^2+3n-1$ sont premiers entre eux.

Exercice n°5 :

I) Soit l'équation (E) : 70x-13y=8.
1- Déterminer un couple (u,v) d'entiers tel que 70u-13v=1.
2- En déduire une solution particulière de (E) puis la résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
II) Soient a et b les entiers naturels définis par a = $(p+1)^2$ et b = p^3+1 où p est un entier premier différent de 2 .
1- On suppose que (a,b) est solution de (E) .Montrer que $a\equiv 12[13]$.

2- On pose d = pgcd(a,b) .

   a- Justifier que d divise 8

   b- Vérifier que $p^3+1 = (p+1)^2(p-2) + 3(p+1)$.En déduire que d = pgcd ($(p+1)^2$,3(p+1)) puis que d = p+1 ou d = 3(p+1) .

   c- Prouver que d ne peut pas être égale à 3(p+1) puis en déduire les valeurs possibles de p

   d- Montrer que la seule valeur possible de p est 7.

Exercice n°6 :

1- Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que PGCD($a + b$; ab) = p, où p est un nombre premier.

a. Démontrer que p divise a^2. (On remarquera que $a^2 = a(a+b)-ab$).

b. En déduire que p divise a.

On constate donc, demême, que p divise b.

c. Démontrer que PGCD(a ; b) = p.

2- On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$.

a. Résoudre le système $\begin{cases} \text{PGCD}(a\,;b) = 5 \\ \text{PPCM}(a\,;b) = 170 \end{cases}$.

b. En déduire les solutions du système : $\begin{cases} \text{PGCD}(a+b\,;ab) = 5 \\ \text{PPCM}(a\,;b) = 170 \end{cases}$.

Exercice n°7

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que n et $2n + 1$ sont premiers entre eux.

2. On pose $\alpha = n+3$ et $\beta = 2n+1$ et on note δ le PGCD de α et β.

a. Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ.

b. Démontrer que α et β sont multiples de 5 si et seulement si ($n - 2$) est multiple de 5.

3. On considère les nombres a et b définis par : $\begin{cases} a = n^3 + 2n^2 - 3n \\ b = 2n^2 - n - 1 \end{cases}$.

Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par ($n - 1$).

4. a. On note d le PGCD de $n(n + 3)$ et de $(2n + 1)$. Montrer que δ divise d, puis que $\delta = d$.

b. En déduire le PGCD, Δ, de a et b en fonction de n.

c. Application : Déterminer Δ pour n = 2 009 ; déterminer Δ pour n = 2 010.

Exercice n°8 :

On considère deux entiers naturels, non nuls, x et y premiers entre eux.

On pose $S = x + y$ et $P = xy$.

1. a. Démontrer que x et S sont premiers entre eux, de même que y et S.

b. En déduire que $S = x + y$ et $P = xy$ sont premiers entre eux.

c. Démontrer que les nombres S et P sont de parités différentes (l'un pair, l'autre impair).

2. Déterminer les diviseurs positifs de 84 et les ranger par ordre croissant.

3. Trouver les nombres premiers entre eux x et y tels que : $SP = 84$.

4. Déterminer les deux entiers naturels a et b vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a+b=84 \\ ab=d^3 \end{cases} \text{ avec } d = \text{PGCD}(a\,;b)$$

Exercice n°9 :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{pu_n^2 + 1} \end{cases}$ où p est un réel non nul

1- On suppose que p = 1.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n}$ .Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

2- On suppose que $p \in \left]0,1\right[$

a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \prec \dfrac{1}{\sqrt{1-p}}$

b- Etudier la monotonie de la suite (U_n).En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite

3- On suppose que $p \in \left]1,+\infty\right[$ .On pose $S_n = 1 + p + p^2 + p^3 + \ldots\ldots + p^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$

a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 - u_n^2 = p^n$

b- En déduire que : $u_n = \sqrt{S_n}$

4- On suppose que p est un entier différent de 1

a- Calculer $p^n + (1-p)u_n^2$.En déduire que p^n et 1-p sont premiers entre eux b- Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $\left(E_n\right): p^n x-(1-p)y=p$ .Justifier que l'équation $\left(E_n\right)$ possède des solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ et vérifier que les solutions de $\left(E_n\right)$ sont les couples $\left(p+k(1-p),-u_n^2+kp^n\right);k\in\mathbb{Z}$

c- En déduire dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ les solutions de l'équation : $10^n x+2^{n+2}y=10.2^{n-1}$