http://afimath.jimdo.com/		$4^{ème}$Inf 2 Durée : 3 h

DEVOIR DE SYNTHÈSE N° : 02

Exercice 1 (3 points)

A)On considère une suite (u_n), définie sur$\mathbb{N}$dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$par $v_n = -\frac{2}{u_n}$. Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse

1)Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.

2)Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.

3)Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.

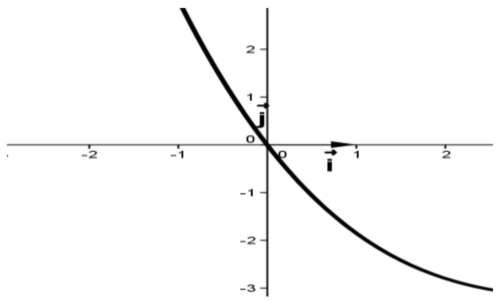
4)Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

B) Dans chacune des questions suivantes il y a une seule réponse exacte, laquelle ?

1)une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-1)^2$ est :

a) $F : x \mapsto \frac{1}{2}(x-1)^3$ b) $F : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 2010$ c) $F : x \mapsto 2(x-1)$

2)Soit φ la courbe d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$, alors le sens de variation de F sur $[-1,2]$est le suivant



a)

x	-1	2
F(x)	↘	

b)

x	-1	0	2
F(x)	↘	F(0)	↗

C)

x	-1	0	2
F(x)	↗	F(0)	↘

Exercice 2(3 points)

Soit A=$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ et B=$\begin{pmatrix} 53 & -52 & 23 \\ -22 & 8 & 38 \\ -7 & 68 & -37 \end{pmatrix}$

1)a)Calculer AB

b)En déduire que A inversible et déterminer sa matrice inverse A^{-1}

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système

$$\begin{cases} 8x + y + 6z = 89 \\ 3x + 5y + 7z = 104 \\ 4x + 9y + 2z = 77 \end{cases}$$

Exercice 3(4 points)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = \dfrac{8u_n - 6}{u_n + 1} \end{cases}$

1)a)Montrer que pour tout entier naturel n on a $u_n \geq 6$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n - 1)(u_n - 6)}{u_n + 1}$

c)En déduire que la suite u est décroissante et qu'elle est **convergente**

d) Préciser la limite de la suite u

2)a)Montrer que pour tout entier naturel $u_{n+1} - 6 \leq \dfrac{2}{7}(u_n - 6)$

b) Montrer par récurrence que $|u_n - 6| \leq 3\left(\dfrac{2}{7}\right)^n$

c)Retrouver alors la limite de la suite u

Exercice 4(6 points)

Soit f la fonction définie sur$\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3 + (x-1)e^{-x}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$
(unités graphiques 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées.)

1) Calculer $f\ (0)$

2) a)Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b)Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ **Interpréter graphiquement ce résultat**.

3) Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra remarquer que, : $f(x) = 3 + \dfrac{x}{e^x} - e^{-x}$.)

Interpréter graphiquement ce résultat.
4)a)Montrer que, pour tout réel x : $f'(x) = (2-x)e^{-x}$,
b) Dresser le tableau de variations de f .

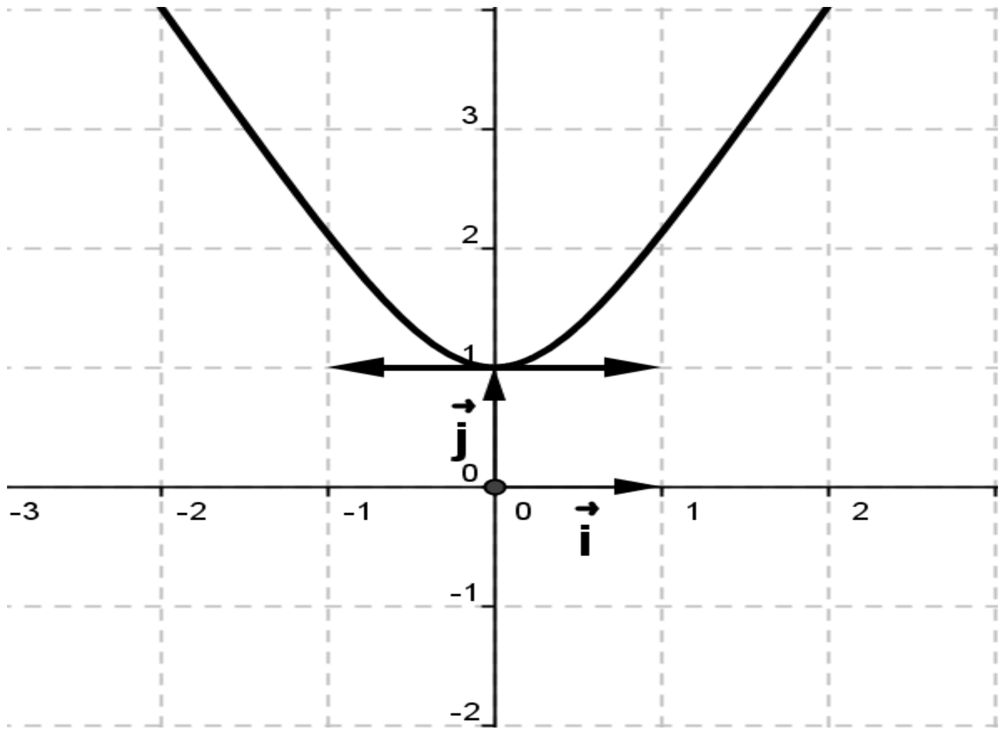
5)a)Ecrire une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0

b) Tracer la courbe C et la tangente T dans le repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$

6) Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=x\left(3-\mathrm{e}^{-x}\right)$, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5(4 points)

Dans la figure ci—dessous on a représenté dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe d'une fonction f **continue** sur $\mathbb{R}$ et paire.



Par une lecture graphique répondre aux questions suivantes

1)a)Déterminer f(0) et f'(0)

b) Déterminer le signe de f(x)

2)a) Justifier que f admet une primitive F telque F(0)=0

b) Montrer que F impaire

c) On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$,déterminer alors $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$

d)Dresser le tableau de variation de F .

e)En déduire que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

4) On admet dans cette question que $f(x)=\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$.

Vérifier que $F(x)=x\sqrt{1+x^2}$ quelque soit x $\in\mathbb{R}$