
DEVOIR DE SYNTHESE N° 2

SECTIONS : 4^{ème} Sciences de l'informatique 2
 EPREUVE : Mathématiques
 DUREE : 3 heures
 PROFESSEUR :

EXERCICE N° 1: (3 points)

Cet exercice est un Q.C.M (Questionnaire à Choix Multiples). Chaque question admet une seule réponse exacte : a, b ou c. Pour chacune des questions indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Barème : Une mauvaise réponse enlève la moitié des points attribués à la question. L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points de l'exercice est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est ramenée à 0.

Pour toutes les questions suivantes, on donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur $]-3, +\infty[$. On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère.

x	-3	-2	1	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	-2	0	1

Q1	F désigne une primitive de f sur $]-3, +\infty[$. F est :	a) strictement décroissante sur $]-2;3[$ b) strictement décroissante sur $]-3;1[$ c) strictement croissante sur $]-2;3[$
Q2	La courbe (C) admet pour asymptote la droite d'équation :	a) $y = -3$ b) $x = 1$ c) $x = -3$
Q3	g est la fonction définie par $g(x) = \ln[f(x)]$ sur l'intervalle $]3, +\infty[$. On peut affirmer que :	a) $0 < g(x) < 1$ b) $g(x) > 0$ c) $g(x) < 0$

EXERCICE N° 2: (5 points)

En annexe, on donne le graphique représentant la courbe (C_f) d'une fonction bijective de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$

La courbe (C_f) admet une asymptote $D : y = 2x$

On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f

- 1- Que peut-on dire de la dérivabilité de f à droite en 1 ? en déduire la dérivabilité de f^{-1} à droite en 1
- 2- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$
- 3- Dresser le tableau de variations complet de f^{-1}
- 4- Tracer, sur le graphique, la courbe $(C_{f^{-1}})$ de f^{-1}

EXERCICE N° 3: (6 points)

I. Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$

1. Calculer la dérivée de la fonction g et étudier son signe. En déduire les variations de la fonction g .
2. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$.

II. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{2x} - \frac{x}{2} + 1$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. a. Calculer la limite de f à droite en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
b. Calculer la limite de f en $+\infty$.
c. Montrer que la droite D d'équation $y = -\frac{x}{2} + 1$ est asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
d. Etudier les positions relatives de la droite D et de la courbe C_f .
2. a. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.
b. En déduire le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f .
3. Tracer la droite D et la courbe C_f dans le repère fourni en annexe.

EXERCICE N° 4: (6 points)

(- - -)

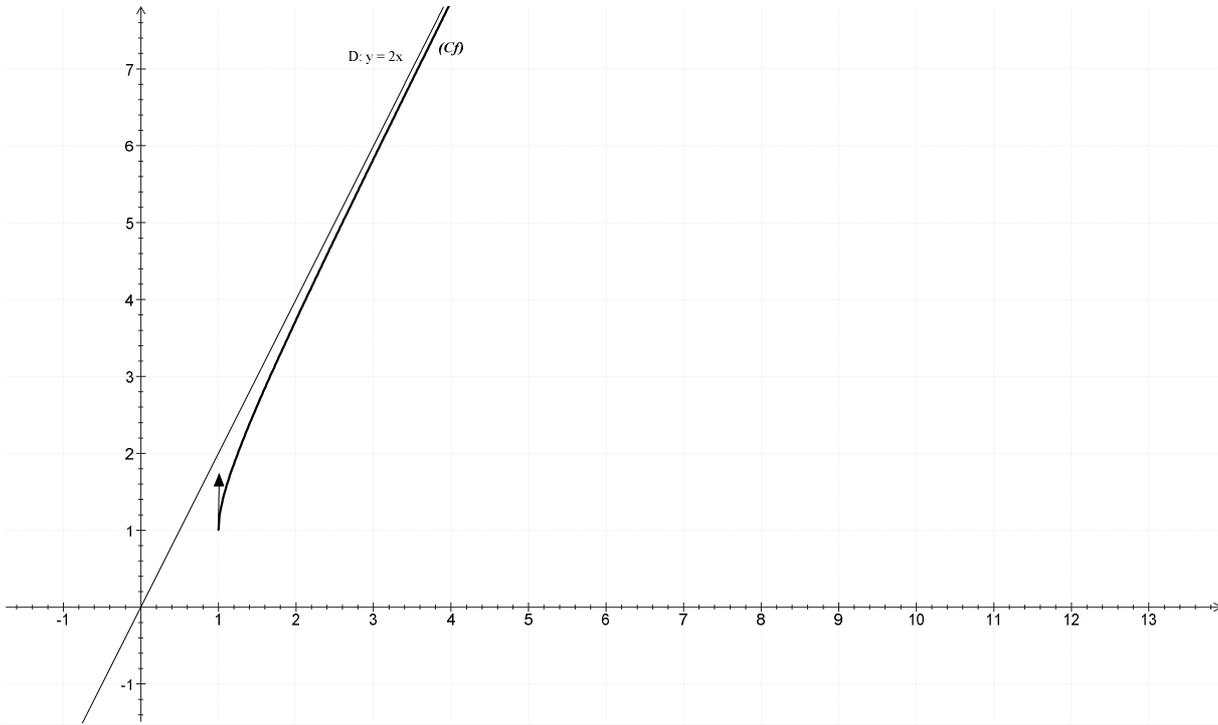
ANNEXE A RENDRE AVEC LA COPIE

Nom :

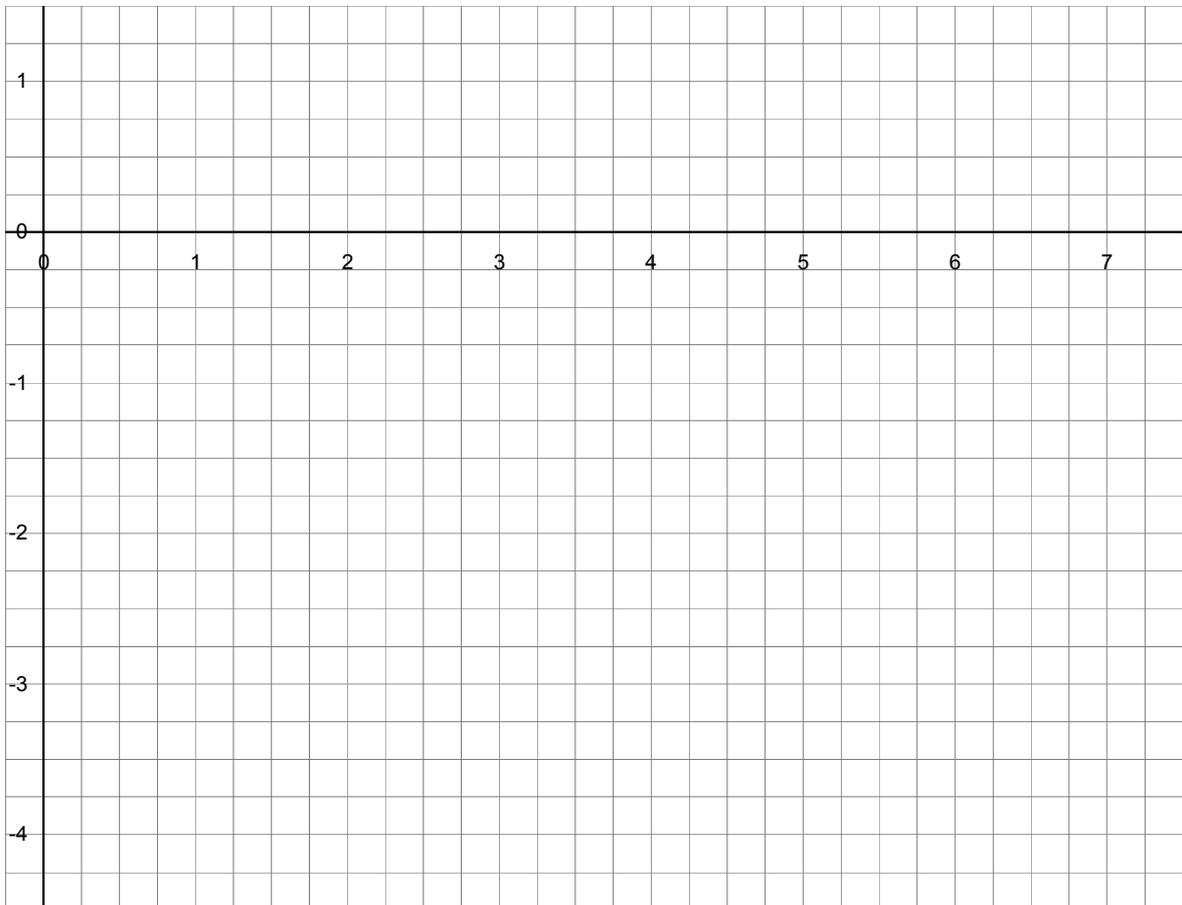
Prénom :

4 Sc.Inf 2

EXERCICE N° 2:



EXERCICE N° 3:



Correction

Solution-Exercice 1

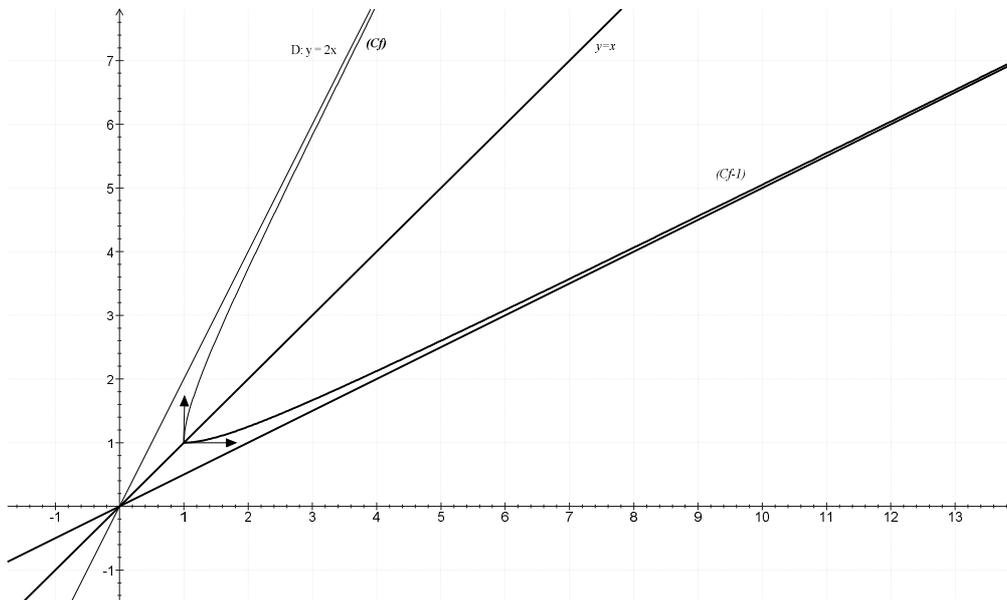
Q₁ - a) ; Q₂ - c) ; Q₃ - c)

Solution-Exercice 2

- 1- (C_f) admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente verticale donc f n'est pas dérivable à droite en 1
 Par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$, (C_{f⁻¹}) admet au point d'abscisse $f(1)=1$ une demi-tangente horizontale donc f^{-1} est dérivable à droite en 1 et $(f^{-1})'_d(1) = 0$
- 2- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0$
- 3- f et f^{-1} ont même sens de variations, et puisque f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ alors :

x	1	$+\infty$
f^{-1}	1	$+\infty$

4-



Solution-Exercice 3

I- $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$; $D_g =]0, +\infty[$

1- g est dérivable sur $]0, +\infty[$ (comme étant somme de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$)

$$g'(x) = -2x - \frac{1}{x} < 0 \text{ pour tout } x > 0. \text{ Donc } g \text{ est strictement décroissante sur }]0, +\infty[$$

2- $g(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		0	

D'où

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

II- $f(x) = \frac{\ln x}{2x} - \frac{x}{2} + 1$; $D_f =]0, +\infty[$

1- a- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$. L'axe des ordonnées est une asymptote verticale à C_f

$$b- \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} + 1 = -\infty$$

$$c- \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(-\frac{x}{2} + 1 \right) \right] = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ donc } D : y = -\frac{x}{2} + 1 \text{ est asymptote à } C_f \text{ au voisinage de } +\infty$$

d- $f(x) - y = \frac{\ln x}{2x}$ donc pour tout $x > 0$, le signe de $f(x) - y$ est celui de $\ln x$

- Si $0 < x < 1$ alors $f(x) - y < 0$ et par suite C_f est en dessous de D
- Si $x > 1$ alors $f(x) - y > 0$ et par suite C_f est au dessus de D
- Si $x = 1$ alors $C_f \cap D = \left\{ A \left(1, \frac{1}{2} \right) \right\}$

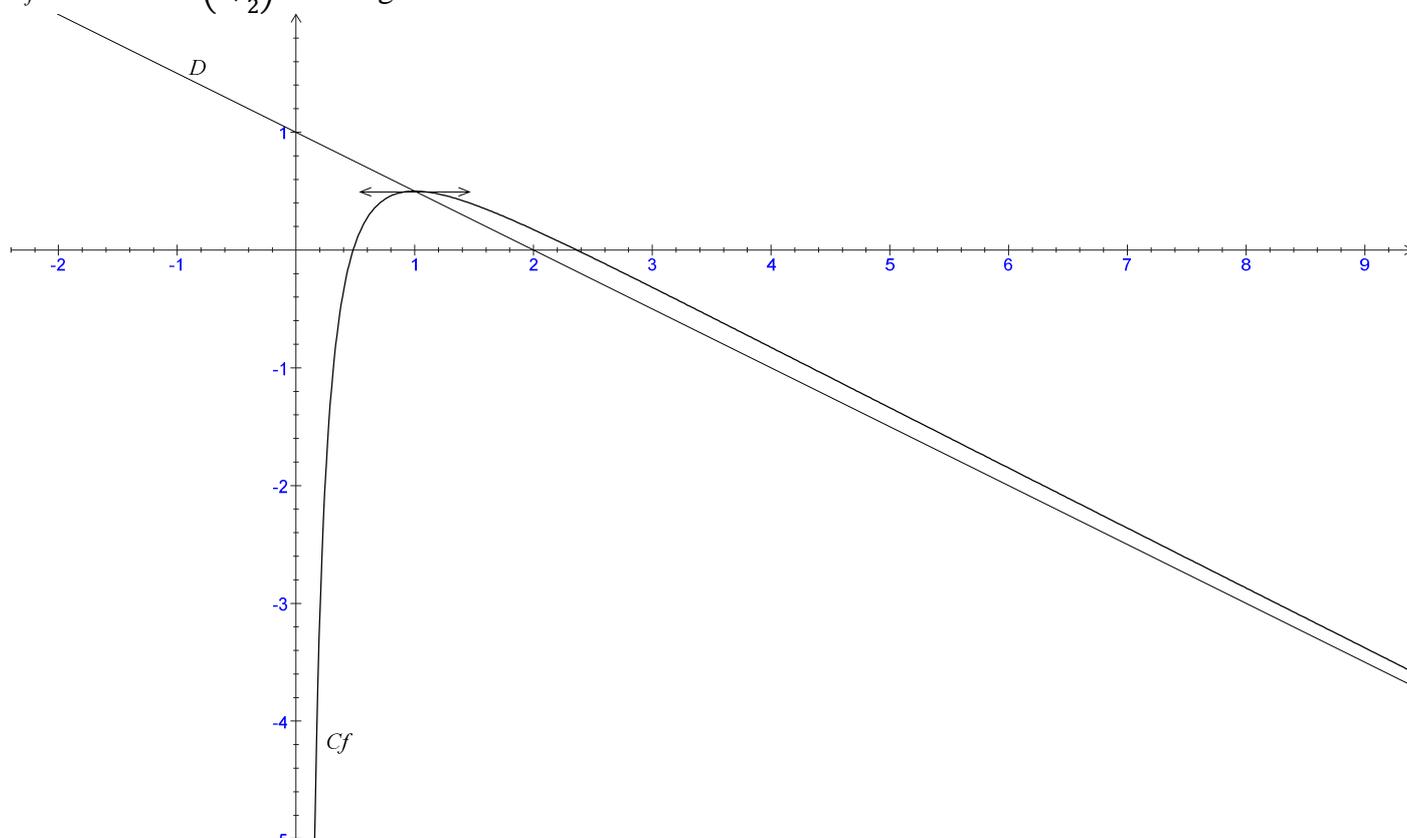
2- a- $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times 2x - 2 \ln x}{4x^2} - \frac{1}{2} = \frac{2 - 2 \ln x}{4x^2} - \frac{1}{2} = \frac{1 - \ln x}{2x^2} - \frac{1}{2} = \frac{1 - \ln x - x^2}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$

b- pour tout $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$\frac{1}{2}$	
	$-\infty$		$-\infty$

3-

C_f admet en $A \left(1, \frac{1}{2} \right)$ une tangente horizontale



Solution-Exercice 4

1- a- $D: \begin{cases} x = -\frac{2}{5} - 2\alpha \\ y = -\frac{1}{5} + 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$

b- (AB) est la droite passant par A et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ alors

(AB): $\begin{cases} x = 1 \\ y = \beta \\ z = 2 + 2\beta \end{cases}; \beta \in \mathbb{R}$

$$3 \times 1 + 4 \times 0 - 2 \times 2 + d = 0 \text{ d'où } d = 1$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{(ABC): 3x + 4y - 2z + 1 = 0}$$

$$3- P_1: 2x + y + 2z + 1 = 0 ; P_2: x - 2y + 6z = 0 ; D: \begin{cases} x = -\frac{2}{5} - 2\alpha \\ y = -\frac{1}{5} + 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

a- Etudions l'intersection de P_1 et D

$$\text{Soit } M(x, y, z) \in D \cap P_1 \text{ alors } 2\left(-\frac{2}{5} - 2\alpha\right) + \left(-\frac{1}{5} + 2\alpha\right) + 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{4}{5} - 4\alpha - \frac{1}{5} + 2\alpha + 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \text{ donc } D \subset P_1$$

Etudions l'intersection de P_2 et D

$$\text{Soit } M(x, y, z) \in D \cap P_2 \text{ alors } -\frac{2}{5} - 2\alpha - 2\left(-\frac{1}{5} + 2\alpha\right) + 6\alpha = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{5} - 2\alpha + \frac{2}{5} - 4\alpha + 6\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \text{ donc } D \subset P_2$$

Comme P_1 et P_2 ne sont pas confondus (puisque leurs équations ne sont pas équivalentes) alors P_1 et P_2 sont sécants selon la droite D

b- On a : $P_1 \cap P_2 = D$, étudions donc l'intersection de D et le plan (ABC)

$$\text{Soit } M(x, y, z) \in D \cap (ABC) \text{ alors } 3 \times \left(-\frac{2}{5} - 2\alpha\right) + 4 \left(-\frac{1}{5} + 2\alpha\right) - 2\alpha + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{6}{5} - 6\alpha - \frac{4}{5} + 8\alpha - 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow -1 = 0 \text{ Impossible donc } D \cap (ABC) = \emptyset$$

$$\text{D'où } \boxed{P_1 \cap P_2 \cap (ABC) = \emptyset}$$