* * * **DEVOIR DE CONTROLE N° 2** * * *	**SECTIONS :** 4ème *Sciences Informatiques* **EPREUVE :** *Mathématiques* **DUREE :** 2 *heures* **:**

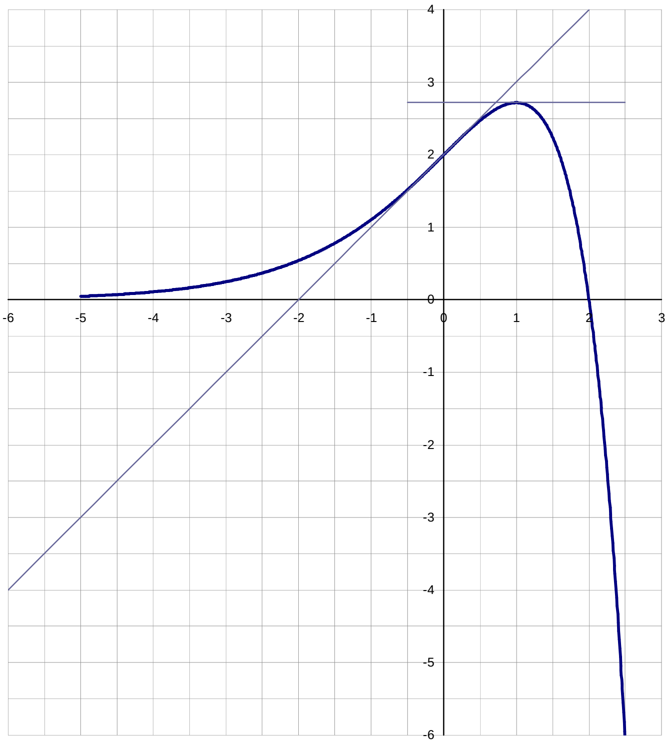
Exercice 1 : (4 pts)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées. Une seule de ces réponses est exacte.

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $\left[-5,\frac{5}{2}\right]$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

- La courbe (C_f) représentée ci-dessous est celle de la fonction f.
- Les points $A(0\,,2)$ et $C\,(2\,,0)$ appartiennent à la courbe (C_f) .
- Le point de la courbe (C_f) d'abscisse (-5) a une ordonnée strictement positive.
- La tangente (T) en A à la courbe (C_f) passe par le point D$(-2\,;0)$.
- La tangente à la courbe (C_f) au point B d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses.



Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Partie A : ***aucune justification n'est demandée***

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse enlève 0,5 point. L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Si le total des points de la partie A est négatif, la note attribuée à cette partie est ramenée à zéro.

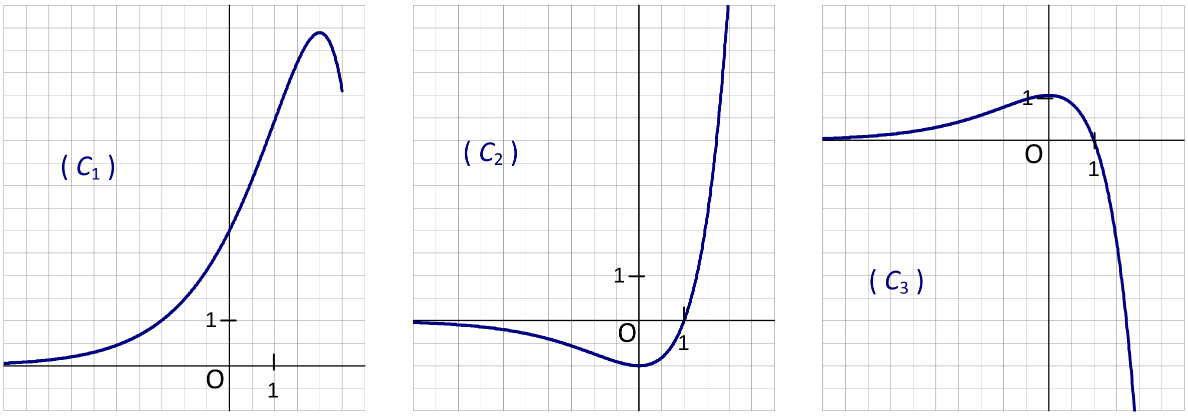
On note $f\,'$ la fonction dérivé de la fonction f

1. Quelle est la valeur de $f\,'(0)$?
   a. $f\,'(0) = 1$ b. $f\,'(0) = 2$ c. $f\,'(0) = 0$
2. Quelle est la valeur de $f\,'(1)$?
   a. $f\,'(1) = 1$ b. $f\,'(1) = 2$ c. $f\,'(1) = 0$

Partie B : ***chaque réponse doit être justifiée***

1. Parmi les trois courbes ci-dessous, l'une est la représentation graphique de la fonction dérivée $f\,'$ de la fonction f . Laquelle ?
   a. La courbe (C_1) b. La courbe (C_2) c. La courbe (C_3)
2. Parmi les trois courbes ci-dessous, l'une est la représentation graphique d'une primitive F de la fonction f, F étant définie sur l'intervalle $\left[-5,\frac{5}{2}\right]$. Laquelle ?
   a. La courbe (C_1) b. La courbe (C_2) c. La courbe (C_3)

http://afimath.jimdo.com/



<u>Exercice 2</u> : (6 pts)

1- a- Ecrire $(1-2i)^2$ sous forme algébrique

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-(3+4i)z+7i-1=0$

2- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^3-(3+5i)z^2+(10i-5)z+7+i=0$

a- Vérifier que i est une solution de (E)

b- Développer l'expression : $(z-i)\left(z^2-(3+4i)z+7i-1\right)$

c- Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

3- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

Soit les points A, B et C d'affixes respectives $1+3i$; i et $2+i$

a- Placer sur une figure les points A, B et C

b- Quelle est la nature du triangle ABC ? justifier la réponse.

<u>Exercice 3</u> : (5 pts)

Soit la fonction f définie sur $[2,+\infty[$ par $f(x)=x+\sqrt{x^2-4}$

1- Dresser le tableau de variation complet de f

2- Montrer que f réalise une bijection de $[2,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera

3- Soit f^{-1} la fonction réciproque de f.

a- Déterminer : le sens de variations de f^{-1} sur J ; $\lim\limits_{+\infty} f^{-1}$ et $f^{-1}(2)$

b- Calculer $f(3)$ puis $\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt{5}+3\right)$

c- Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in$ J

<u>Exercice 4</u> : (5 pts)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x)=\dfrac{2x\left(x^2+2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$

1- Pourquoi peut-on affirmer l'existence d'une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$?

2- Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ telle que $F(0)=0$

a- Quelles sont les variations de F sur $\mathbb{R}_+$? En déduire le signe de F sur $\mathbb{R}_+$

b- Déterminer le réel a tel que : pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $f(x)=\dfrac{ax}{\left(x^2+1\right)^2}+\dfrac{ax}{\left(x^2+1\right)^3}$

c- En déduire l'expression de F(x)

http://afimath.jimdo.com/

Correction

Solution-Exercice 1

Partie A :

1) a) ; 2) c)

Partie B :

1)

x	-5		1		$\frac{5}{2}$
$f(x)$		↗		↘	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Donc la courbe de f' est (C_3)

2)

x	-5		2		$\frac{5}{2}$
$f(x)$		$+$		$-$	
$F(x)$		↗		↘	

Donc la courbe de F est (C_1)

Solution-Exercice 2

1- a) $(1-2i)^2 = 1-4i-4 = -3-4i$

b) $z^2-(3+4i)z+7i-1=0$ $(a=1\,;b=-(3+4i)\,;c=7i-1)$

$$\Delta = b^2-4ac = (3+4i)^2-4(7i-1) = 9+24i-16-28i+4 = -3-4i = (1-2i)^2$$

Alors $\delta = 1-2i$ est une racine carré de Δ

D'où $z' = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{3+4i-1+2i}{2} = 1+3i$ et $z'' = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{3+4i+1-2i}{2} = 2+i$

$$\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{1+3i\ ;\ 2+i\}}$$

2- $(E): z^3-(3+5i)z^2+(10i-5)z+7+i=0$

a) $i^3-(3+5i)i^2+(10i-5)i+7+i = -i+3+5i-10-5i+7+i=0$ donc i est une solution de (E)

b) $(z-i)\left(z^2-(3+4i)z+7i-1\right) = z^3-(3+4i)z^2+(7i-1)z-iz^2+(3i-4)z+7+i =$

$z^3-(3+4i+i)z^2+(7i-1+3i-4)z+7+i = z^3-(3+5i)z^2+(10i-5)z+7+i$

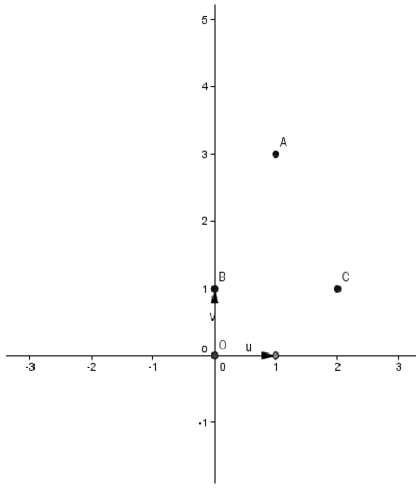
c) (E) $\Leftrightarrow (z-i)\left(z^2-(3+4i)z+7i-1\right)=0 \Leftrightarrow z-i=0$ ou $z^2-(3+4i)z+7i-1=0$

$\Leftrightarrow z=i$ *ou* $z=1+3i$ *ou* $z=2+i$ donc $\boxed{S_{\mathbb{C}} = \{i\,;\ 1+3i\ ;\ 2+i\}}$

3- a) $z_A = 1+3i \Leftrightarrow A(1,3)$

$z_B = i \Leftrightarrow B(0,1)$

$z_C = 2+i \Leftrightarrow C(2,1)$



b) $AB = |z_B-z_A| = |i-1-3i| = |-1-2i| = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$

$AC = |z_C-z_A| = |2+i-1-3i| = |1-2i| = \sqrt{(1)^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$

$BC = |z_C-z_B| = |2+i-i| = |2| = 2$

AB = AC donc ABC est un triangle isocèle en A

http://afimath.jimdo.com/

Solution-Exercice 3

1- $x \longmapsto x^2 - 4$ est dérivable et strictement positive sur $]2, +\infty[$ donc f est dérivable sur $]2, +\infty[$ et

$f'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} > 0$

x	2	$+\infty$
$f(x)$	2 $\nearrow$	$+\infty$

$f(2) = 2$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty + \infty = +\infty$

2- f est continue et strictement croissante sur $[2,+\infty[$ alors f est une bijection de $[2,+\infty[$ sur

$f\left([2,+\infty[\right) = [2,+\infty[$

3- a) f et f^{-1} ont même sens de variation, donc f^{-1} est strictement croissante sur $[2,+\infty[$

$\lim_{+\infty} f = +\infty$ donc $\lim_{+\infty} f^{-1} = +\infty$

$f(2) = 2$ donc $f^{-1}(2) = 2$

b) $f(3) = 3 + \sqrt{5}$

$(f^{-1})\left(3 + \sqrt{5}\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(3+\sqrt{5}\right)\right)}$

Or $f(3) = 3 + \sqrt{5} \Leftrightarrow f^{-1}\left(3 + \sqrt{5}\right) = 3$ donc $(f^{-1})\left(3 + \sqrt{5}\right) = \frac{1}{f'(3)}$

D'autre part $f'(3) = 1 + \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}}$ donc $(f^{-1})\left(3 + \sqrt{5}\right) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+3} = \frac{3\sqrt{5}-5}{4}$

c) $f^{-1} : [2,+\infty[\longrightarrow [2,+\infty[$

$x \mapsto f^{-1}(x) = y$

$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow y + \sqrt{y^2 - 4} = x \Leftrightarrow \sqrt{y^2 - 4} = x - y \Leftrightarrow y^2 - 4 = (x - y)^2$

$\Leftrightarrow y^2 - 4 = x^2 - 2xy + y^2 \Leftrightarrow 2xy = x^2 + 4 \Leftrightarrow y = \frac{x^2+4}{2x}$

Donc $f^{-1}(x) = \frac{x^2+4}{2x}$; $x \in [2,+\infty[$

Solution-Exercice 4

1- f est continue sur $\mathbb{R}_+$(quotient et produit) alors f admet une primitive sur $\mathbb{R}_+$

2- a) F est la primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ alors $F'(x) = f(x) \geq 0$ alors F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$
Comme $x \in \mathbb{R}_+$c.à.d. $x \geq 0$ alors $F(x) \geq F(0)$ donc $F(x) \geq 0$

b) $\dfrac{ax}{\left(x^2+1\right)^2} + \dfrac{ax}{\left(x^2+1\right)^3} = \dfrac{ax\left(x^2+1\right)+ax}{\left(x^2+1\right)^3} = \dfrac{ax\left(x^2+2\right)}{\left(x^2+1\right)^3} = f(x)$ alors $a = 2$

c) $f(x) = \dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2} + \dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^3} = \dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2} + (2x)\left(x^2+1\right)^{-3}$

d'où $F(x) = -\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{-3+1}(x^2+1)^{-3+1} + c = -\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2(x^2+1)^2} + c$

or $F(0) = 0$ donc $c = \frac{3}{2}$

Conclusion : $\boxed{F(x) = -\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2(x^2+1)^2} + \frac{3}{2}}$

http://afimath.jimdo.com/