Mathématiques aux lycées

41 Exercices et problèmes de révision

4ème Sciences de l'informatique

4ème Techniques

4ème Economie et Gestion

@Fonctions réciproques

@Fonction logarithme népérien

@Fonction exponentielle

@Primitives

@ Intégrale

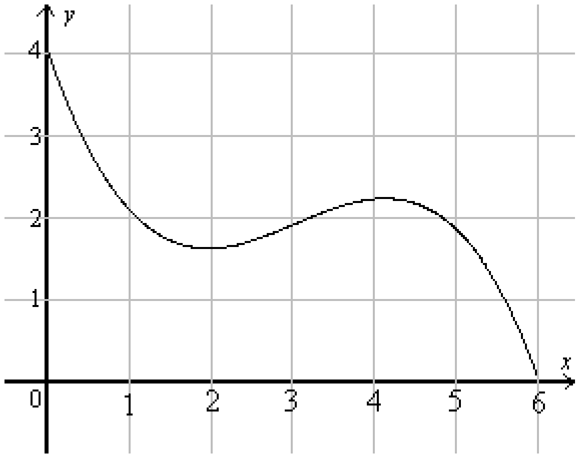
http://afimath.jimdo.com/

Exercice 1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des trois questions, trois réponses sont proposées ; une seule de ces réponses convient.

1) Voici la courbe représentative d'une fonction *f* sur l'intervalle [0 ;6 [.



Sur l' intervalle [0 ; 6 [, la fonction composée $x \mapsto \ln [f(x)]$

a) est strictement croissante.

b) a les mêmes variations que *f*

c) a les variations contraires de celles de *f*

2) Soit g la fonction définie sur]0 ; + ∞[par $g(x) = 4x - 2 \ln x$.

Dans un repère, une équation de la tangente à la courbe représentative de *g* au point d'abscisse 1 est :

a) $y = 2x + 2$.

b) $y = 4x - 2$.

c)$y = 2x + 6$

3) L'ensemble des solutions de l'équation $2 \ln x = \ln(2x + 3)$ est :

a) l'ensemble vide.

b) {-1; 3}.

c){3}

Correction

1) Sur l' intervalle [0 ; 6 [, la fonction composée $x \mapsto \ln [f(x)]$ a les même variations que la fonction *f* : en effet la fonction *f* est à valeurs positive sur l'intervalle [0 ; 6[et la fonction ln est croissante sur]0 ; + ∞[donc elle ne change pas les variations de la fonctions *f*.

2) Soit g la fonction définie sur]0 ; + ∞[par $g(x) = 4x - 2 \ln x$.

$g'(x) = 4 - 2/x$, $g'(1) = 4 - 2 = 2$, $g(1) = 4 - 2\ln 1 = 4$

équation de la tangente à la courbe représentative de *g* au point d'abscisse 1 :

$y = g'(1)(x - 1) + g(1)$ soit $y = 2(x - 1) + 4$ donc $y = 2x - 2 + 4$

donc la bonne réponse est : $y = 2x + 2$.

3) Résolution de l'équation $2 \ln x = \ln(2x + 3)$:

Ensemble de définition de cette équation :

Cette équation a un sens si $x > 0$ et $2x + 3 > 0$ donc pour $x > 0$ et $x > -3/2$.

Par conséquent, il faut que $x > 0$

l'ensemble de définition de cette équation est donc $]0 ; +\infty[$.

Résolution de cette équation :

$\ln x^2 = \ln (2x + 3)$ soit $x^2 = 2x + 3$ ou encore $x^2 - 2x - 3 = 0$

en calculant le discriminant Δ de cette équation on trouve deux solutions : -1 et 3.

Mais $-1 \notin]0 ; +\infty[$. La bonne réponse est donc $\{3\}$

Exercice 2

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

On s'interesse dans ce problème à une fonction *f* définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

On note C la courbe représentative de la fonction *f* dans le plan P.

Partie A :

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

On désigne par g' la fonction dérivée de la fonction g.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

En déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

2. Calculer g(1) et en déduire l'étude du signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Partie B :

On admet qu'il existe deux constantes réelles *a* et *b* telles que, pour tout nombre réel *x* appartenant à $]0 ; +\infty[$,

$$f(x) = ax + b - \frac{\ln x}{x}$$

1. on désigne par f' la fonction dérivée de la fonction *f*.

Calculer $f'(x)$ pour tout réel *x* appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

2. Sachant que la courbe C passe par le point de coordonnées (1 ; 0) et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, déterminer les nombres *a* et *b*.

Partie C :

On admet désormais que, pour tout nombre réel *x* appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$,

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$$

1. a. Déterminer la limite de la fonction *f* en 0 et donner une interprétation graphique de cette limite.

b. Déterminer la limite de la fonction *f* en $+\infty$.

2. a. Vérifier que, pour tout réel *x* appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

b. Etablir le tableau de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

c. En déduire le signe de $f(x)$ pour *x* appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

3. On considère la droite D d'équation $y = x - 1$.

a. Justifier que la droite D est asymptote à la courbe C.

b. Etudier les positions relatives de la courbe C et de la droite D.

c. Tracer la droite D et la courbe C dans le plan P muni du repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Partie D :

On note A la mesure, exprimée en cm², de l'aire de la partie du plan P comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

1. On considère la fonction H définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $H(x) = (\ln x)^2$.

On désigne par H ' la fonction dérivée de la fonction H.

a. Calculer $H'(x)$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$

b. En déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$

2. a. Calculer A.

b. Donner la valeur de A , arrondie au mm²

Correction

Partie A :

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$.

1.

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$$

$$\text{pour } x \in]0;+\infty[, \quad 2x > 0 \quad et \quad \frac{1}{x} > 0 \text{ donc } g'(x) > 0$$

on en déduit que la fonction g est croissante (strictement) sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

2. $g(1) = 1^2 - 1 + \ln 1 = 0 + 0 = 0$

en utilisant le fait que la fonction g est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ et $g(1) = 0$ on en déduit le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		-	0	+	$\nearrow$
$g(x)$		-	0	+	

Partie B :

1.

$$f'(x) = a - \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = a - \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

2. La courbe C passe par le point de coordonnées (1 ; 0) et qu'elle admet en ce point une tangente horizontale, $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$ soit :

$$f(1)=0 \Leftrightarrow a+b-\frac{\ln 1}{1}=0 \Leftrightarrow a+b=0$$

$$f'(1)=0 \Leftrightarrow a-\frac{1-\ln 1}{1^2}=0 \Leftrightarrow a-1=0$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$$

$$f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$$

Partie C :

1. a.

$$f(x)=x-1-\frac{\ln x}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0}(x-1)=-1 \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} x=0^+ \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty \end{array}\right\} \lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$$

la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe C

b.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty}(x-1)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0 \end{array}\right\} \lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$$

2. a.

$$f'(x)=1-\frac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln x}{x^2}=1-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2-1+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

b. $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$, on en déduit les variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

c. 0 est le minimum absolue de la fonction f sur son ensemble de définition on $f(x) \geq 0$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

3. On considère la droite D d'équation $y = x - 1$.

a.

$$f(x)-(x-1)=x-1-\frac{\ln x}{x}-(x-1)=-\frac{\ln x}{x}$$

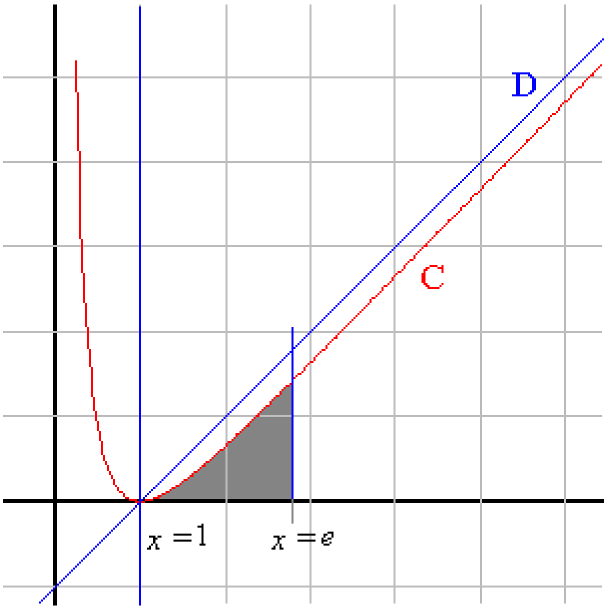
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=0$$

donc la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe C en $+\infty$.

b.

Etudions le signe de $f(x) - (x - 1)$ d'après a. il est du signe de $- \ln x$ soit :
$- \ln x > 0$ équivaut à $\ln x < 0$ ou encore $\ln x < \ln 1$ soit $x < 1$:
si $x < 1$ alors $f(x) - (x - 1) > 0$ donc sur l'intervalle $]0 ; 1[$,
la courbe C est au dessus de l'asymptote D.
si $x > 1$ alors $f(x) - (x - 1) < 0$ donc sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$,
la courbe C est au dessous de l'asymptote D.
Si $x = 1$, la courbe C et la droite D se coupent en un point de coordonnées (1 ; 0)

c.



Partie D :

1. a.

$$H(x) = (\ln x)^2$$

$$H = u^2 \text{ avec } u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$H' = 2u'u \Rightarrow H'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \ln x = 2\frac{\ln x}{x}$$

b. une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ est la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

2. a. b.

$$A = \int_1^e f(x)dx = [F(x)]_1^e = \left[\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e =$$

$$\left[\frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2}(\ln e)^2 - \left(\frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2}(\ln 1)^2\right)\right] =$$

$$\left[\frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2} - \left(\frac{-1}{2}\right)\right] = \frac{e^2}{2} - e \ u.a.$$

$$1\,u.a = 4cm^2 \Rightarrow A = 4\left(\frac{e^2}{2} - e\right) = \left(2e^2 - 4e\right)cm^2 \approx 3{,}90cm^2$$

Exercice 3

Partie A

Soit g la fonction définie sur]0 ; + ∞[par g(x) = $x^2 + 3x - 4 + 4 \ln x$.

1. Déterminer les limites de g en 0 et + ∞.

2. Soit g' la dérivée de g. Montrer que :

$$g'(x) = \frac{2x^2 + 3x + 4}{x}$$

3. Dresser le tableau de variations de g sur]0 ; + ∞[.

4. Calculer g(1) et en déduire le signe de g(x) sur]0 ; + ∞[.

Partie B

Soit f la fonction définie sur]0 ; + ∞[par :

$$f(x) = x + 3\ln x - \frac{4\ln x}{x}$$

On appelle (C) la courbe de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$(unité 3 cm).

1. a. Déterminer la limite de f en + ∞.

b. Déterminer la limite de f en 0 ; on remarquera que :

$$f(x) = x + \left(3 - \frac{4}{x}\right)\ln x$$

Que peut-on en déduire ?

2. a. Montrer que pour tout x strictement positif :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

b. En utilisant les résultats de la partie A, étudier les variations de f sur l'intervalle]0 ; + ∞[.

c. Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle]0 ; + ∞[.

3. On rappelle que pour tout x de l'intervalle]0 ; + ∞[,

$$f(x) = x + \left(3 - \frac{4}{x}\right)\ln x$$

Donner les solutions dans l'intervalle]0 ; + ∞[de l'équation $f(x) = x$.

4. Tracer (C) et la droite d'équation $y = x$.

5. Interpréter graphiquement le résultat de la question 3.

Partie C

1. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle]0 ; + ∞[par

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3x\ln x - 2(\ln x)^2$$

est une primitive de f sur l'intervalle]0 ; + ∞[.

2. On considère dans le plan le domaine (D) délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

a. Hachurer le domaine (D).

b. Calculer l'aire du domaine (D) en unités d'aires puis en cm^2. On donnera la valeur exacte puis la valeur approchée arrondie au mm^2 près.

Correction

Partie A

1.

$$g(x) = x^2 + 3x - 4 + 4\ln x$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} x^2 + 3x - 4 = -4 \\ \lim\limits_{x\to 0} 4\ln x = -\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 + 3x - 4 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} 4\ln x = +\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$$

2. Soit g' la dérivée de g.

$$g'(x) = 2x + 3 + \frac{4}{x} = \frac{(2x+3)x+4}{x} = \frac{2x^2+3x+4}{x}$$

3. g'(x) est du signe de $2x^2 + 3x + 4$ calculons les racines de ce polynôme :

$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 4 = 9 - 16 = -7 < 0$ donc $2x^2 + 3x + 4$ n'a pas racine et reste toujours strictement positif, par conséquent g'(x) > 0 sur]0 ; + ∞[, il en résulte que g est croissante sur]0 ; + ∞[

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖		+		
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

4. g(1) = 1 + 3 - 4 + 4 ln 1 = 0

donc g(x) < 0 sur]0 ; 1[et g(x) > 0 sur]1;+ ∞[.

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	-	0	+	

Partie B

1. a. limite de *f* en + ∞.

$$f(x) = x + 3\ln x - \frac{4\ln x}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} 3\ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{-4\ln x}{x} = 0\end{array}\right\} \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

b. la limite de *f* en 0 ;

$$f(x) = x + \left(3 - \frac{4}{x}\right)\ln x$$

$$x + \left(3 - \frac{4}{x}\right)\ln x = x + 3\ln x - \frac{4\ln x}{x} = f(x)$$

$$f(x) = x + \left(3 - \frac{4}{x}\right)\ln x$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{-4}{x} = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \left(3 - \dfrac{4}{x}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{array}\right\} = \lim_{x \to 0^+} \left(3 - \frac{4}{x}\right)\ln x = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \left(3 - \dfrac{4}{x}\right)\ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

On peut en déduire que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C)

2. a. Pour tout x strictement positif :

$$f(x) = x + 3\ln x - \frac{4\ln x}{x}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{3}{x} - \frac{\frac{4}{x} \times x - 4\ln x}{x^2} = 1 + \frac{3}{x} - \frac{4 - 4\ln x}{x^2} =$$

$$\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} - \frac{4 - 4\ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 3x - 4 + 4\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b. $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ dont le signe a été trouvé **Partie A 4.**

c.

$$f(1) = 1 + 3\ln 1 - \frac{4\ln 1}{1} = 1$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3. On rappelle que pour tout x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$,

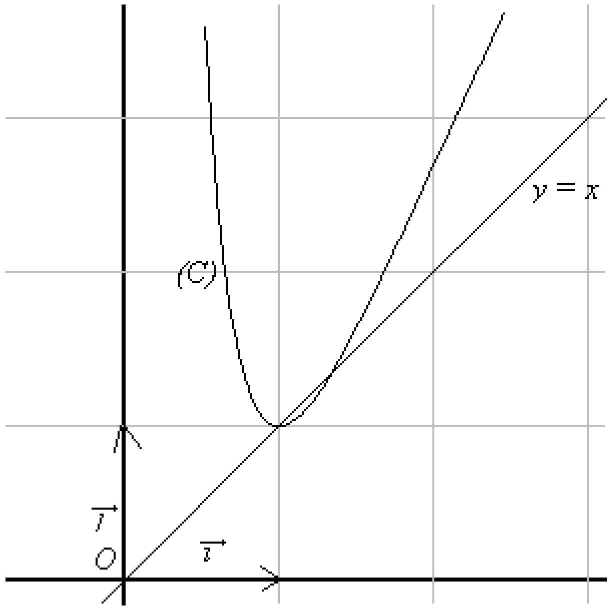
$$f(x) = x \Leftrightarrow x + \left(3 - \frac{4}{x}\right)\ln x = x \Leftrightarrow \left(3 - \frac{4}{x}\right)\ln x = 0$$

$$3 - \frac{4}{x} = 0 \quad ou \quad \ln x = 0 \Leftrightarrow 3 = \frac{4}{x} \quad ou \quad x = 1 \Leftrightarrow$$

$$3x = 4 \quad ou \quad x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \quad ou \quad x = 1$$

S = {1 ; 4/3 }

4.



5. La droite d'équation *y = x* coupe la courbe (C) en deux points de coordonnées (1 ; 1) et (4/3 ; 4/3)

Partie C

1.

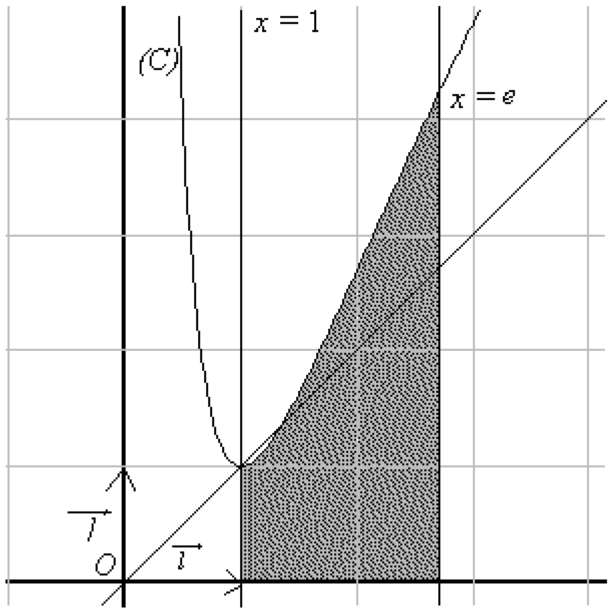
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3x\ln x - 2(\ln x)^2$$

$$F'(x) = x - 3 + 3(\ln x + x \times \frac{1}{x}) - 2 \times 2\frac{1}{x}\ln x = x - 3 + 3\ln x + 3 - \frac{4\ln x}{x}$$

$$= x + 3\ln x - \frac{4\ln x}{x} = f(x)$$

donc F est une primitive de *f* sur l'intervalle]0 ; + ∞[.

2. a.



b.

$$\int_1^e f(x)dx = [F(x)]_1^e = F(e) - F(1)$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - 3e + 3e\ln e - 2(\ln e)^2 - \left(\frac{1}{2}1^2 - 3\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - 3e + 3e - 2 - \frac{1}{2} + 3 = \boxed{\left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\right)u.a}$$

$$1\,u.a. = 3^2 cm^2 = 9\,cm^2$$

$$en\ cm^2 : \boxed{37{,}75}$$

Exercice 4

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$. (L'unité graphique est 2 cm).
Le but du problème est l'étude de la fonction *f* définie sur l'intervalle]0;+ ∞[par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2\ln(x)}{x}$$

puis de calculer une aire.

I) On note g la fonction définie sur l'intervalle]0;+ ∞[par : g(x) = x^2 - 4 + 2 ln(x).

1) Calculer la fonction dérivée *g'* de la fonction g.

2) Déterminer le sens de variation de la fonction g.

(On ne demande pas les limites en 0 et en + ∞.)

3) Résolution de l'équation g(x) = 0.

a) Démontrer que sur l'intervalle [1 ; 2] l'équation g(x) = 0 possède une solution unique α.

b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de ce nombre α.

4) Déduire de ce qui précède le signe de g(x) suivant les valeurs de x,
dans l'intervalle]0;+ ∞[.

II) 1) Déterminer la limite de *f* en 0. Qu'en déduit-on pour la courbe C ?

2) Etude en + ∞.

a) Déterminer la limite de *f* en + ∞.

b) Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ -1 est asymptote à la courbe C ?.

c) Déterminer les coordonnées du point A commun à la courbe C et à la droite D.

d) Etudier la position de la courbe C par rapport à la droite D.

3) Etude des variations de *f*.

a) Déterminer la fonction dérivée *f* ' de la fonction *f*

Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle]0;+ ∞[; *f* '(x) = g(x)/x^2 , où g est la fonction étudiée dans la partie I.

b) En utilisant les résultats de la partie I, dresser le tableau des variations de la fonction *f*

4) On note T la tangente à la courbe C au point d'abscisse e^2.

Montrer que T est parallèle à l'asymptote D.

5) Dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, tracer la droite D, la tangente T et la courbe C à l'aide de l'étude précédente. (On prendra *f*(α) = 1,25 m)

III) On définit sur l'intervalle]0;+ ∞[la fonction H par :

$$H(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln x - (\ln x)^2$$

1) Démontrer que H est une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle]0;+ ∞[.

2) Soit E la région du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.
a) Hachurer la région E sur votre figure.
b) On note S l'aire, exprimée en unité d'aire, de la région E
Déterminer la valeur exacte de S.
c) Donner la valeur décimale approchée de cette aire, arrondie au mm^2

Correction

I) 1)

$$g'(x) = 2x + \frac{2}{x}$$

2) g'(x) > 0 comme somme de deux expressions strictement positive sur]0 ; + ∞[donc g est strictement croissante sur]0 ; + ∞[
3) Résolution de l'équation g(x) = 0.
a) g(1) = 1 - 4 = - 3 < 0 et g(2) = 2² - 4 + 2ln2 = 2 ln 2 > 0
g est strictement croissante sur [1 ; 2] , g est dérivable sur [1 ; 2] et g(1) < 0 < g(2) , donc l'équation g(x) = 0 possède une solution unique α sur l'intervalle [1 ; 2].
b) g(1,70) < 0 < g(1,71) donc 1,70 < α < 1,71
4) On en déduit que g(x) < 0 sur]0 ; α[et g(x) > 0 sur] α; + ∞[et g(α) = 0
II) 1) La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe C

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0+} x-1=-1 \\ \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{2}{x}=+\infty \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0+} \left(-2\ln x\right)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 0+} x=0^{+} \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{-2\ln x}{x}=+\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0+} f(x)=+\infty$$

2) Etude en + ∞.
a) Déterminer la limite de f en + ∞.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} x-1=+\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{x}=0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} -2\dfrac{\ln x}{x}=0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$$

b)

$$f(x)-(x-1)=\frac{2}{x}-\frac{2\ln x}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{x}=0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} -2\dfrac{\ln x}{x}=0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to +\infty} \left[f(x)-(x-1)\right]=0$$

c)

$$f(x)=x-1 \Leftrightarrow \frac{2}{x}-\frac{2\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow 1=\ln x \Leftrightarrow \ln e=\ln x \Leftrightarrow x=e$$

donc l'abscisse du point d'intersection de C et D est e et son ordonnée est e - 1 (en remplaçant $x = e$ dans l'équation de D , on trouve $y = e - 1$)

d)

$$f(x)-(x-1)=\frac{2}{x}-\frac{2\ln x}{x}=\frac{2-2\ln x}{x}=\frac{2(1-\ln x)}{x}$$

$f(x) - (x - 1)$ est du signe de $1 - \ln x$, $1 - \ln x > 0$ si et seulement si $\ln x < 1$ soit $x < e$

Conclusion :

- sur l'intervalle $]0\ ;\ e]$, la courbe C est au dessus de la droite D
- sur l'intervalle $[e\ ;\ +\infty[$

3) a)

$$f\,'(x)=1-\frac{2}{x^2}-\frac{\frac{2}{x}\times x-2\ln x}{x^2}=\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}-\frac{2-2\ln x}{x^2}$$

$$f\,'(x)=\frac{x^2-2-2+2\ln x}{x^2}=\frac{x^2-4+2\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

b) $f\,'(x)$ est donc du signe de $g(x)$, on en déduit les variations de f :

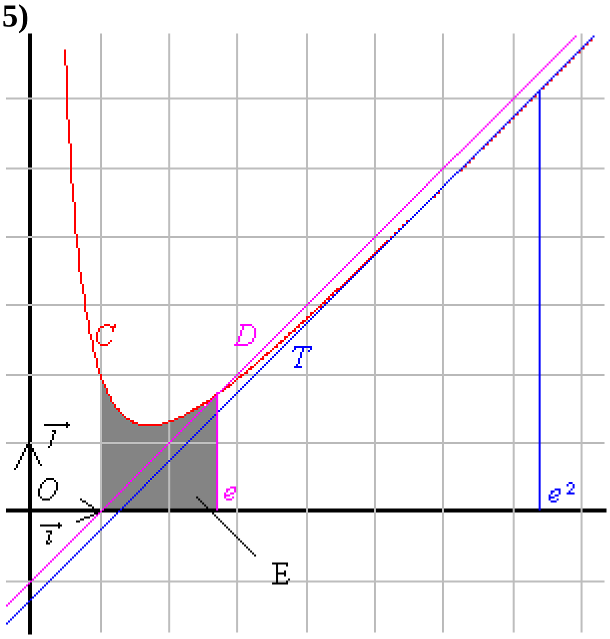
x	0		α		$+\infty$
$f\,'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4) On note T la tangente à la courbe C au point d'abscisse e^2.

$$f\,'(e^2)=\frac{e^4-4+2\ln e^2}{e^4}=\frac{e^4-4+4}{e^4}=1$$

le coefficient directeur de la tangente T est le même que le coefficient directeur de la droite D soit 1.

5)



III) 1)

$$H(x)=\frac{x^2}{2}-x+2\ln x-\underbrace{(\ln x)^2}_{forme\ u^2}$$

$$H'(x)=x-1+\frac{2}{x}-\underbrace{2\frac{1}{x}(\ln x)}_{forme\ 2u'u}=x-1+\frac{2}{x}-\frac{2\ln x}{x}=f(x)$$

donc H est une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2)

a) voir figure

b)

$$S=\int_1^e f(x)dx=\left[\frac{x^2}{2}-x+2\ln x-(\ln x)^2\right]_1^e$$

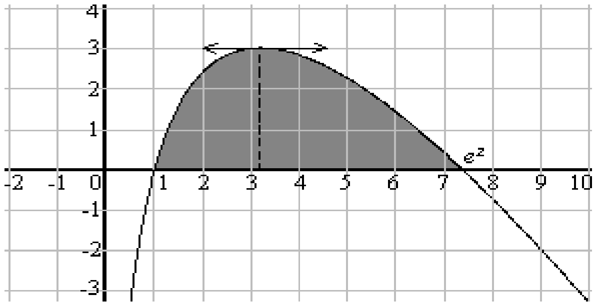
$$=\left[\frac{e^2}{2}-e+2-1-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]=\frac{e^2}{2}-e+1+\frac{1}{2}=\frac{e^2}{2}-e+\frac{3}{2}u.a$$

c) valeur décimale approchée de cette aire, arrondie au mm^2 (2 chiffres après la virgule)
l'unité d'aire est 4 cm² on a S = 9,90 cm²

Exercice 5

Dans une entreprise, on a modélisé le bénéfice réalisé, en milliers de dinars, pour la vente de x centaines d'appareils par la fonction f définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty[$ par : $f(x)=-2x+(e^2-1)\ln x+2$

La courbe de la fonction f est donnée sur la figure ci-dessous :



1. Vérifier par le calcul que $f(l)=0$ et $f(e^2)=0$.

2. A l'aide du graphique, déterminer approximativement :

a) le nombre d'appareils que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser un bénéfice maximal et le montant de ce bénéfice ;

b) les valeurs de x pour lesquelles le bénéfice réalisé est positif ou nul.

3. a) Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty[$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f

c) En déduire le nombre d'appareils vendus par cette entreprise quand elle réalise le bénéfice maximal (le résultai sera arrondi à l'unité).

4. Parmi les courbes données en annexe, une seule correspond à celle d'une primitive de f
Déterminer la courbe qui convient, en expliquant votre choix (on pourra s'appuyer sur le signe de $f(x)$)

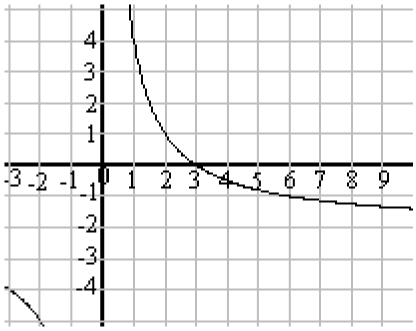
5. En utilisant le résultat de la question précédente, en déduire, par une lecture graphique, une valeur approchée (en unité d'aire) de l'aire du domaine hachuré dans la figure ci- dessus.

6. a) Démontrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty[$ par :
$F(x)=x^2+(3-e^2)x+(e^2-1)x\ln x$ est une primitive de f.

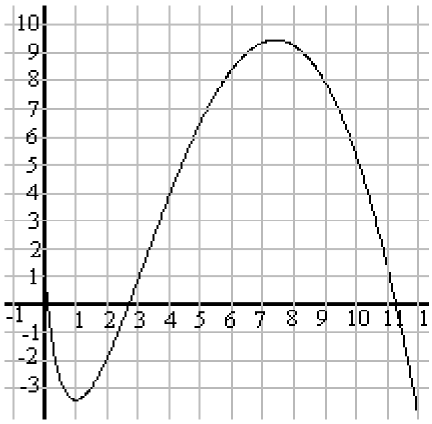
b) Déterminer la valeur moyenne du bénéfice de l'entreprise sur l'intervalle où ce bénéfice est positif ou nul.

annexe (les courbes ne sont pas exactement les mêmes que sur l'original mais j'ai essayé de faire correspondre le plus possible ...)

Courbe de F_1 :



Courbe de F_2 :



Courbe de F_3 :

Correction

1. f (l) = -2 + (e^2 - 1) ln 1 + 2 = -2 + 0 + 2 = 0

f (e^2) = -2e^2 + (e^2 - 1) ln e^2 + 2 = -2e^2 + (e^2 - 1)2 ln e + 2 = -2e^2 + (e^2 - 1)2 + 2 =
-2e^2 + 2e^2 - 2 + 2 = 0

2. a) sur la courbe, f admet comme maximum absolu 3 pour x = 3,2

Donc le nombre d'appareils que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser un bénéfice maximal est de 320

et le montant du bénéfice maximum est de 3000 dinars.

b) les valeurs de x pour lesquelles le bénéfice réalisé est positif ou nul appartiennent à l'intervalle [1 ; e^2]

Entre 100 et 739 appareils fabriqués , le bénice est positif.

3. a)

$$f'(x) = -2 + (e^2 - 1) \times \frac{1}{x} = \frac{-2x + e^2 - 1}{x}$$

b)

$$f'(x) = -2 + (e^2 - 1) \times \frac{1}{x} = \frac{-2x + e^2 - 1}{x}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + e^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{e^2 - 1}{2}$$

On en déduit les variations de *f* :

x	0		$\frac{e^2-1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

c)

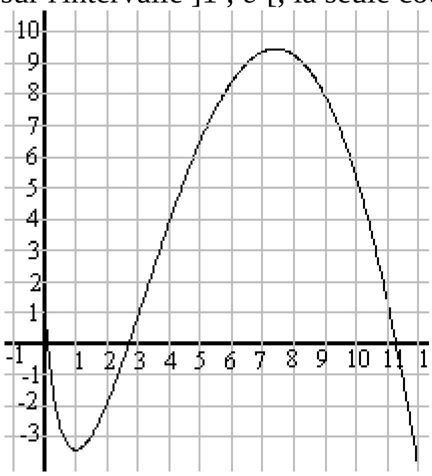
$$f\left(\frac{e^2 - 1}{2}\right) \approx 3,031$$

$$\frac{e^2 - 1}{2} \approx 3,19$$

le bénéfice maximum est de 3031 dinars pour 319 appareils.

4.

$f(x) > 0$ pour x appartenant à $]1\,;\, e^2[$ sinon $f(x) \leq 0$, donc la fonction primitive de f doit être croissante sur l'intervalle $]1\,;\, e^2[$, la seule courbe convenable est donc la courbe de la fonction F^2.



5. Avec la précision permise par la figure :

$$\int_1^6 f(x)dx = F_2(6) - F_2(1) = 8,5 - (-3,5) = 8,5 + 3,5 = 12$$

6. a)

$$F'(x) = -2x + 3 - e^2 + (e^2 - 1)(1\ln x + x \times \frac{1}{x})$$

$$= -2x + 3 - e^2 + (e^2 - 1)(\ln x + 1)$$

$$= -2x + 3 - e^2 + e^2 \ln x + e^2 - \ln x - 1$$

$$= -2x + e^2 \ln x - \ln x + 2$$

$$= -2x + (e^2 - 1)\ln x + 2 = f(x)$$

donc F est une primitive de *f* sur $]\,0\,;\,+\infty[$

b)

$$\frac{1}{e^2-1}\int_1^{e^2} f(x)dx = \frac{1}{e^2-1}\left[F(x)\right]_1^{e^2} =$$

$$\frac{1}{e^2-1}\left[\left(-e^4+(3-e^2)e^2+(e^2-1)e^2\ln e^2\right)-\left(-1+(3-e^2)\right)\right] =$$

$$\frac{1}{e^2-1}\left[\left(-e^4+3e^2-e^4+2(e^2-1)e^2\right)-\left(2-e^2\right)\right] =$$

$$\frac{1}{e^2-1}\left[\left(-e^4+3e^2-e^4+2e^4-2e^2\right)-\left(2-e^2\right)\right] =$$

$$\frac{1}{e^2-1}\left[\left(e^2\right)-\left(2-e^2\right)\right] = \frac{1}{e^2-1}\left[2e^2-2\right] = \frac{2(e^2-1)}{e^2-1} = 2$$

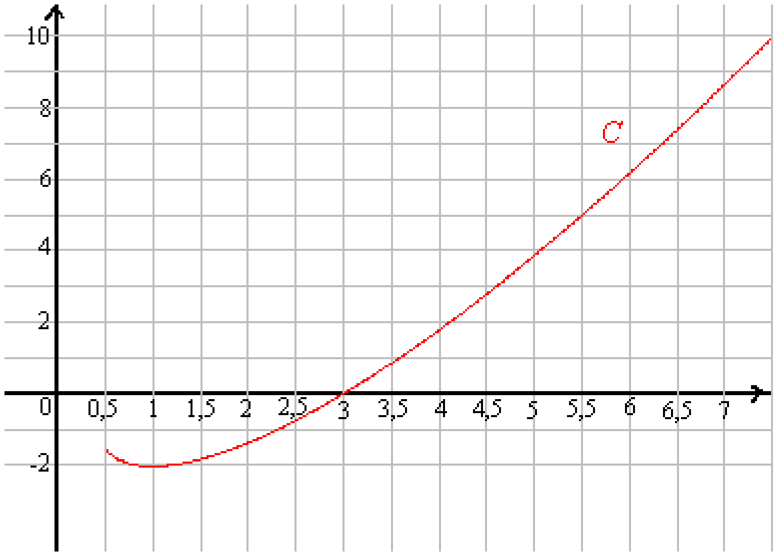
La valeur moyenne du bénéfice est donc de 2000 dinars.

Exercice 6

La courbe (C) ci-dessous représente une fonction F définie et dérivable sur l'intervalle
J =] 1/2 ; + ∞[.

On sait que (C) coupe l'axe des abscisses au point (3 ; 0) et a une tangente horizontale au point (1 ; - 2).

On note *f* la fonction dérivée de F.



1. a) A l'aide du graphique, donner les variations de F et en déduire le signe de *f*

b) Donner $f(1)$, F(l) et F(3). Préciser le signe de $f(3)$

c) Calculer

$$\int_1^3 f(x)dx$$

2. Trois fonctions f_1, f_2 et f_3 sont définies sur l'intervalle J par :

$$f_1(x) = (x^2-x+1)e^{2x-1} \qquad f_2(x) = \ln(2x-1) \qquad f_3(x) = -1+\frac{1}{2x-1}$$

Une de ces trois fonctions est la fonction *f*

a) Etudier le signe de f_1 sur l'intervalle J.

b) Résoudre l'équation $f_2(x) = 0$ sur l'intervalle J.

c) Calculer $f_3(1)$

d) Calculer

$$\int_1^3 f_3(x)dx$$

e) En déduire la fonction *f*

Correction

1. a) F est décroissante sur l'intervalle]1/2 ; 1] et croissante sur l'intervalle [1 ; + ∞[.
donc $f(x) \leq 0$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle]1/2 ; 1] et
$f(x) \geq 0$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle [1 ; + ∞[(puisque f est la dérivée de la fonction F)
b) $f(1)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1
comme cette tangente est horizontale alors $f(1) = 0$.
La courbe représentative (C) de la fonction F passe par les points (3 ; 0) et (1 ; -2) donc
F(3) = 0 et F(1) = -2
$f(x) > 0$ pour tout réel x appartenant à l'intervalle]1 ; + ∞[donc $f(3) > 0$, $f(3)$ est positif.
c)

$$\int_1^3 f(x)dx = F(3) - F(1) = 0 - (-2) = 2$$

2. Trois fonctions f_1, f_2 et f_3 sont définies sur l'intervalle J par :

$$f_1(x) = (x^2 - x + 1)e^{2x-1} \quad f_2(x) = \ln(2x-1) \quad f_3(x) = -1 + \frac{1}{2x-1}$$

Une de ces trois fonctions est la fonction f
a) $f_1(x)$ est du signe de $x^2 - x + 1$ sur l'intervalle J car $e_{2x-1} > 0$ sur J.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3 < 0$$

donc le polynôme $x^2 - x + 1 > 0$ sur J par conséquent $f_1(x) > 0$ sur J
b) $f_2(x) = 0$ soit $\ln(2x - 1) = 0$ d'où $2x - 1 = 1$ il en résulte $x = 0$ cette solution ne peut être retenue sur l'intervalle J. Donc S = $\varnothing$
c)

$$f_3(1) = -1 + \frac{1}{2-1} = -1 + 1 = 0$$

d)

$$\int_1^3 f_3(x)dx = \left[-x + \frac{1}{2}\ln(2x-1)\right]_1^3 = -3 + \frac{1}{2}\ln 5 - (-1) = -2 + \frac{\ln 5}{2}$$

e) En déduire la fonction f
- la fonction f ne peut pas être la fonction f_1 car $f_1 > 0$ sur J.
- la fonction f ne peut pas être la fonction f_3 car

$$\int_1^3 f_3(x)dx \neq \int_1^3 f(x)dx$$

- la fonction f est donc la fonction f_2 (le signe de f_2 correspond aux variations de F)

Exercice 7

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.
PREMIERE PARTIE

On considère une fonction g définie sur l'intervalle]-1/2 ; +∞ [par :
$g(x) = -x^2 + a\,x - \ln(2\,x + b)$, où a et b sont deux réels.
Calculer a et b pour que la courbe représentative de g dans un plan muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ passe par l'origine du repère et admette une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1/2.

DEUXIEME PARTIE
Soit f la fonction définie sur l'intervalle]-1/2 ; + ∞ [par :
$f(x) = -x^2 + 2\,x - \ln(2\,x + 1)$.

On admet que *f* est dérivable et on note *f* ' sa dérivée.
Le tableau de variation de la fonction *f* est le suivant :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}+\ln\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

1) Justifier tous les éléments contenus dans ce tableau.
2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle [1/2 ; 1].
b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
3) Déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]-1/2 ; +\infty[$

Correction

PREMIÈRE PARTIE
La courbe représentative de g passe par l'origine du repère soit $g(0) = 0$
$-\ln b = 0$ soit $\ln b = 0$ d'où $b = 1$.
La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1/2, donc $g'(1/2) = 0$

$$g'(x) = -2x + a - \frac{2}{2x+b} = -2x + a - \frac{2}{2x+1}$$

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -1 + a - \frac{2}{1+1} = 0 \Leftrightarrow -1 + a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

soit $g(x) = -x^2 + 2x - \ln(2x + 1)$.

DEUXIÈME PARTIE
1) Justifions :
- le signe de *f* '(*x*) :

$$f'(x) = -2x + 2 - \frac{2}{2x+1} = \frac{(-2x+2)(2x+1) - 2}{2x+1}$$

$$= \frac{-4x^2 - 2x + 4x + 2 - 2}{2x+1} = \frac{-4x^2 + 2x}{2x+1} = \frac{2x(-2x+1)}{2x+1}$$

$f'(x)$ est du signe du polynôme $2x(-2x + 1)$ puisque $2x + 1 > 0$ sur $]-1/2 ; +\infty[$, on retrouve du signe - à l'extérieur des racines 0 et 1/2 et du signe + à l'intérieur des racines, ce qui justifie par la même occasion les variations de *f*.
- les limites en -1/2 et + ∞
tout d'abord en -1/2

$f(x) = -x^2 + 2x - \ln(2x+1)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to \frac{-1}{2} \\ x > \frac{-1}{2}}} -x^2 + 2x = \frac{-1}{4} - 1 = \frac{-5}{4} \\ \lim\limits_{\substack{x \to \frac{-1}{2} \\ x > \frac{-1}{2}}} 2x+1 = 0^+ \ et \quad \lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to \frac{-1}{2} \\ x > \frac{-1}{2}}} \ln(2x+1) = -\infty \end{array}\right\}$$

$$donc \ \lim\limits_{\substack{x \to \frac{-1}{2} \\ x > \frac{-1}{2}}} f(x) = +\infty$$

en + ∞

$f(x) = -x^2 + 2x - \ln(2x+1)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 + 2x = \lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 2x+1 = +\infty \ et \quad \lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(2x+1) = +\infty \end{array}\right\}$$

$$donc \ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

- justifions les images de 0 et 1/2

$f(x) = -x^2 + 2x - \ln(2x+1)$

$f(0) = -0 + 0 - \ln 1 = 0$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + 1 - \ln(1+1) = \frac{-1}{4} + \frac{4}{4} - \ln 2 = \frac{3}{4} - \ln 2 = \frac{3}{4} + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

2) a) $f(1) = -1 + 2 - \ln 3 = -\ln 3 + 1 < 0$

La fonction f est dérivable et strictement décroissante sur l'intervalle [1/2 ; 1]
puisque $f'(x) < 0$ sur]1/2 ; 1[, de plus $f(1/2) > 0 > f(1)$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle [1/2 ; 1].

b) $f(0{,}80) > 0 > f(0{,}81)$ donc $0{,}80 < \alpha < 0{,}81$

3)

x	$\frac{-1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		α		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$			
variations de f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$\frac{3}{4}+\ln\frac{1}{2}$	↘	0	↘	$-\infty$

on en déduit le signe de $f(x)$ sur]-1/2 ; + ∞ [:

x	-1/2		0		α		$+\infty$
$f(x)$		+	0	+	0	-	

Exercice 8

Partie A :

Dans cette partie, pour chaque question, le numéro de la question et préciser en tontes lettres, , VRAI ou FAUX ou ON NE PEUT PAS REPONDRE.

On connaît le tableau de variation d'une fonction *f* définie et dérivable
sur $D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1

1. La droite d'équation $x = -2$ est asymptote à la représentation graphique de *f*
2. L'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions dans D*f*.
3. Pour tout *x* appartenant à] 1 ; 3 [, $f'(x) > 0$ (f' désigne la fonction dérivée de *f* sur D_f.)
4. Toute primitive de *f* sur [3 ; 8] est décroissante.
5. La fonction $x \mapsto 1 / f(x)$ est décroissante sur $[3 ; +\infty[$.
Partie B :
Dans cette partie, pour chaque question, trois propositions sont formulées. Une seule d'entre elles convient. Indiquer le numéro de la question et recopier la proposition qui vous semble exacte.
Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{2e^x}{e^x - 1}$$

et Csa courbe représentative dans un repère du plan.
1. L'ensemble de définition D_g de g est égal à :
a) $]0 ; +\infty[$ b) $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ c) $\mathbb{R}\backslash\{1\}$
2. L'équation $g(x) = 3$ admet pour solution :
a) e^3 b) ln 3 c) Aucune solution
3. La limite de g en $+\infty$ est :
a) - 1 b) $+\infty$ c) 2

Correction

Partie A :
On connaît le tableau de variation d'une fonction *f* définie et dérivable
sur $D_f =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1

1. Faux : la droite d'équation $x = -2$ n'est pas asymptote à la représentation graphique de *f*
il s'agit de la droite d'équation $y = -2$ qui est asymptote en $-\infty$
2. Faux : l'équation $f(x) = 2$ admet exactement **trois solutions** dans D*f*.
une sur l'intervalle $]-\infty ; 1[$, une sur l'intervalle]1 ; 3] et enfin une sur l'intervalle $[3 ; +\infty[$
3. Vrai , puisque la fonction *f* est dérivable et strictement croissante sur] 1 ; 3 [.
4. Faux , toute primitive F de *f* sur [3 ; 8] a pour dérivée *f* or $f(x) > 0$ sur [3 ; 8] donc F est croissante .
5. Faux : la fonction $x \mapsto 1 / f(x)$ est la composée de la fonction *f* décroissante sur $[3 ; +\infty[$ suivie de la fonction inverse décroissante sur $]0 ; +\infty[$ donc la fonction $x \mapsto 1 / f(x)$ est croissante sur $]0 ; +\infty[$
Partie B :

Dans cette partie, pour chaque question, trois propositions sont formulées. Une seule d'entre elles convient. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier la proposition qui vous semble exacte, sans justifier votre choix.

Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{2e^x}{e^x - 1}$$

et Csa courbe représentative dans un repère du plan.

1. $e^x - 1 = 0$ si $x = 0$ donc l'ensemble de définition D_g de g est égal à : b) $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

2.

$$g(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{2e^x}{e^x - 1} = 3 \Leftrightarrow 2e^x = 3(e^x - 1) \Leftrightarrow 2e^x - 3e^x = -3$$

$$\Leftrightarrow -e^x = -3 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$$

L'équation g(x) = 3 admet pour solution : b) ln 3

3.

$$g(x) = \frac{2e^x}{e^x - 1}$$

$$posons\ X = e^x, \lim_{x \to +\infty} X = \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{X \to +\infty} \frac{2X}{X - 1} = \lim_{X \to +\infty} \frac{2X}{X} = 2$$

La limite de g en + ∞ est : c) 2

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur l'intervalle]0 ; + ∞[par :

$$f(x) = 5\frac{\ln x}{x} + 3$$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. a) Déterminer la limite de f en 0 ; en donner une interprétation graphique,

b) Déterminer la limite de f en + ∞; en donner une interprétation graphique.

2. a) Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f puis étudier son signe.

b) En déduire le tableau de variation de la fonction f

On y indiquera les limites aux bornes de l'intervalle de définition de f ainsi que la valeur exacte de $f(e)$.

3. a) Déterminer une primitive de f sur]0 ; + ∞[.

On pourra remarquer que $f(x) = 5\,u'(x) \times u(x) + 3$ avec u(x) à préciser,

b) En déduire la valeur exacte de

$$I = \int_2^4 f(t)\,dt$$

sous la forme $a(\ln 2)^2 + b$ avec a et b deux réels à déterminer,

4. a) Préciser le signe de f sur l'intervalle [2;4].

b) Donner une interprétation graphique de I.

5. On admet que le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique x milliers de pièces est égal à $f(x)$. En utilisant les résultats précédents, déterminer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie entre 2000 et 4000 pièces. On donnera une valeur approchée de ce bénéfice à 100 euros près.

Correction

1. a)

$$f(x) = 5\frac{\ln x}{x} + 3$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0+} x = 0^{+} \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0+} 5\frac{\ln x}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0+} 3 = 3 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = -\infty$$

Interprétation graphique : la droite d'équation $x = 0$ est asymptote (verticale) à la courbe C_f

b)

$$f(x) = 5\frac{\ln x}{x} + 3$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 5\frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 3 = 3 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$$

Interprétation graphique : la droite d'équation $y = 3$ est asymptote (horizontale) à la courbe C_f en + ∞

2. a)

$$f'(x) = 5 \times \frac{\frac{1}{x}x - 1 \times \ln x}{x^2} = 5 \times \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$f'(x)$ est du signe de 1 - ln x car $x^2 > 0$ sur]0 ; + ∞[

étudions le signe de 1 - ln x

1 - *ln x > 0 équivaut à - ln x* > - 1 *soit ln x* < 1 d'où $x < e$

sur]0 ; e] , $f'(x) \geq 0$ et sur [e ; + ∞[, $f'(x) \leq 0$

b) $f(e) = 5(1/e) + 3$ = 5/e + 3.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	+	0	-	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	$\frac{5}{e}+3$	↘	3

3. a) $f(x) = 5\,u'(x) \times u(x) + 3$ avec $u(x) = \ln x$ et donc $u'(x) = 1/x$

F définie sur]0 ; + ∞[par

$$F(x) = \frac{5}{2}u(x)^2 + 3x = \frac{5}{2}(\ln x)^2 + 3x$$

est une primitive de la fonction f sur]0 ; + ∞[

b)

$$\int_2^4 f(t)dt = \left[F(t)\right]_2^4 = \frac{5}{2}(\ln 4)^2 + 3 \times 4 - \left(\frac{5}{2}(\ln 2)^2 + 3 \times 2\right)$$

$$= \frac{5}{2}(2\ln 2)^2 + 12 - \frac{5}{2}(\ln 2)^2 - 6$$

$$= \frac{20}{2}(\ln 2)^2 - \frac{5}{2}(\ln 2)^2 + 6 = \frac{15}{2}(\ln 2)^2 + 6$$

4. a) $f(2) = 5(\ln 2)/2 + 3 > 0$ sur l'intervalle [2 ; e] , $f(x) > 0$ (voir tableau de variation)

$f(4) = 5(\ln 4/4 + 3 > 0$ sur l'intervalle [e ; 4] , $f(x) > 0$.
Conclusion $f(x) > 0$ pour tout réel x de l'intervalle [2 ; 4]
b) L'intégrale I représente en unité d'aire l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équation $x = 2$ et $x = 4$ d'un part , la courbe C_f et l'axe des abscisses d'autre part.
5.

$$\mu = \frac{1}{4-2}\int_2^4 f(t)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{15}{2}(\ln 2)^2 + 6\right] = \frac{15}{4}(\ln 2)^2 + 3 \approx 4{,}802$$

La valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie entre 2000 et 4000 pièces est de 4802 € (à 100 € près)

Exercice 10

Partie A :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ;+\infty[$par $f(x) = x\ln(x + 1)$.

Sa courbe représentative (C) dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$est donnée en annexe,

1. a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

b) L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe (C) au point O ?

2. On pose

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$$

a) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq -1$,

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

b) Calculer I.

3. A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations
$x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0{,}25$ admet une seule solution sur l'intervalle [0;l].
On note αcette solution. Donner un encadrement de αd'amplitude 10^{-2}.

Partie B :

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$par

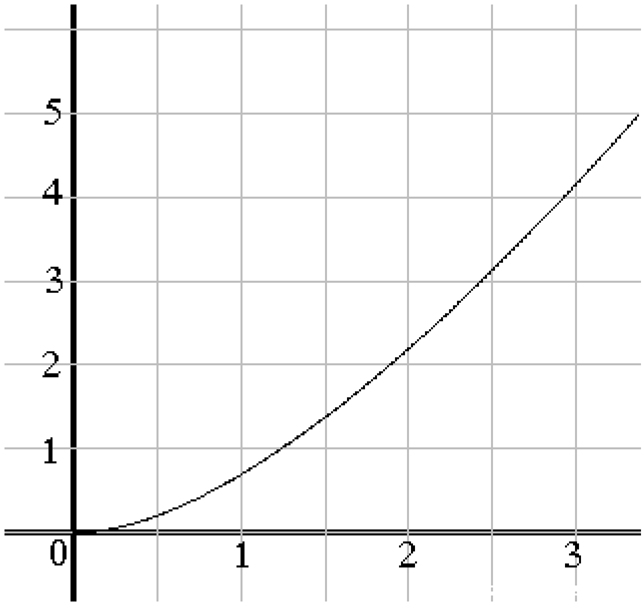
$$u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)dx$$

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) La suite (u_n) converge-t-elle ?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$$

En déduire la limite de la suite (u_n) .



Correction

Partie A :

1.a) *f* est dérivable sur l'intervalle [0 ;+ ∞[comme produit de deux fonction dérivables sur [0 ;+ ∞[et pour pour tout réel *x* de [0 ;+ ∞[, on a :

$$f'(x) = 1\ln(x+1) + x \times \frac{1}{x+1} = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$$

sur]0 ;+ ∞[, $x > 0$ donc $x + 1 > 1$ d'où $\ln(x + 1) > \ln 1$ il en résulte $\ln(x + 1) > 0$

sur]0 ;+ ∞[, $x > 0$ donc $x + 1 > 1$ d'où

$$\frac{x}{x+1} > 0$$

donc sur]0 ;+ ∞[; $f'(x) > 0$ par conséquent *f* est strictement croissante sur [0 ;+ ∞[

b) Déterminons l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 :

Coefficient directeur de la tangente : $f'(0) = \ln 1 + 0 = 0$

Ordonnée du point d'abscisse de (C) : $f(0) = 0$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0)x + f(0)$ soit y = 0

L'axe des abscisses est donc bien tangent à la courbe (C) au point O(0 ; 0).

2. On pose

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$$

a)

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1)}{x+1} + \frac{c}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{ax^2 + (a+b)x + b + c}{x+1}$$

par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}}$$

b)

$$I=\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^1 x-1+\frac{1}{x+1}dx=\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right]_0^1$$

$$I=\frac{1}{2}-1+\ln 2-\ln 1=\boxed{\frac{-1}{2}+\ln 2}$$

3. Si $x\geq 0$; $f(x)\geq 0$ puisque la fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$ donc la courbe (C) est au dessus de l'axe des abscisse sur [0 ; 1] par conséquent l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$ est donné en unités d'aires, par :

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x\ln(x+1)dx \quad \text{posons } u'(x)=x \text{ et } v(x)=\ln(x+1)$$

$$\text{on a donc : } u(x)=\frac{x^2}{2} \text{ et } v'(x)=\frac{1}{x+1}$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}\frac{x^2}{x+1}dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1-\frac{1}{2}I$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\ln 2-0-\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}+\ln 2\right)=\frac{1}{4}$$

4. La fonction f est strictement croissante et continue sur [0;l] de plus $f(0) = 0 <0,25$
et $f(1) = \ln 2 > 0,25$ donc l'équation $f(x) = 0,25$ admet une seule solution sur l'intervalle [0;l].
Sur la calculatrice on lit $f(0,56) < 0,25 < f(0,57)$ donc $0,56 < \alpha < 0,57$

Partie B :

1. Pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)dx-\int_0^1 x^n\ln(x+1)dx$$

$$u_{n+1}-u_n=\int_0^1(x^{n+1}-x^n)\ln(x+1)dx=\int_0^1 x^n(x-1)\ln(x+1)dx$$

$$x\in[0;1]\Rightarrow\begin{cases}x^n\geq 0\\ x-1\leq 0\\ \ln(x+1)\geq 0\end{cases}\Rightarrow x^n(x-1)\ln(x+1)\leq 0\Rightarrow\int_0^1 x^n(x-1)\ln(x+1)dx\leq 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1}-u_n\leq 0 \quad \text{donc la suite } (u_n) \text{ est décroissante } \textbf{(1)}$$

$$x\in[0;1]\Rightarrow x^n\ln(x+1)\geq 0\Rightarrow u_n=\int_0^1 x^n\ln(x+1)dx\geq 0$$

la suite (u_n) est donc minorée par 0 **(2)**
De (1) et (2) , on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

2. Pour tout entier naturel n non nul et tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] on a

$$0\leq\ln(x+1)\leq\ln 2 \text{ soit } 0\leq x^n\ln(x+1)\leq x^n\ln 2$$

en intégrant cette double inégalité sur [0 ; 1] on obtient pour tout entier naturel non nul :

$$0\leq\int_0^1 x^n\ln(x+1)dx\leq\int_0^1 x^n\ln 2dx \text{ d'où } 0\leq u_n\leq\ln 2\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{\ln 2}{n+1}$$

$$\text{d'ou }\lim_{n\to+\infty}u_n=0$$

Exercice 11

PARTIE A

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$

La courbe (C), donnée en annexe 2, est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par: $f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln x$.

1. Déterminer la limite de f en 0. Que peut-on en déduire concernant la courbe ?

2. En écrivant $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = x^2\left(-1 + \frac{10}{x} - \frac{9}{x^2} - \frac{8\ln x}{x^2}\right)$$

déterminer la limite de f en $+\infty$

3. Démontrer que, pour tout réel x de $]0;+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-2(x-1)(x-4)}{x}$$

où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

4. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

5. Dresser le tableau de variation de f

6. a. Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous (les résultats seront arrondis à 10^{-4}).

x	6,18	6,19	6,2	6,21

b. L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, 1 et α dans $]0;+\infty[$.

A l'aide de la question précédente, donner sans justification un encadrement à 10^{-2} près de α.

c. Placer α sur le graphique de l'annexe 2.

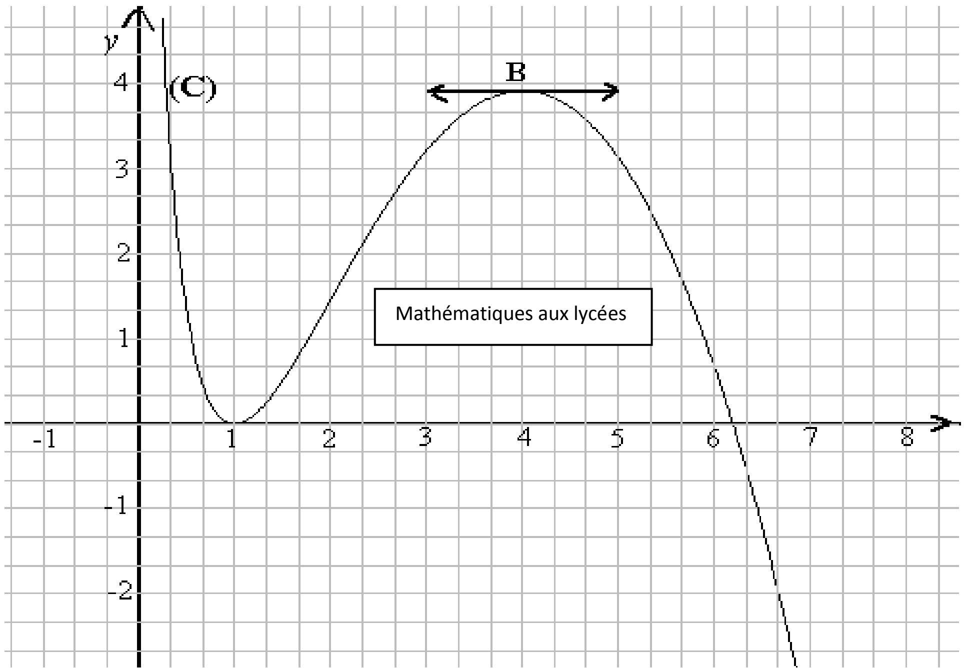
7. Soit F la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$F(x) = -\frac{x^3}{3} + 5x^2 - x - 8x\ln x$$

Démontrer que F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

8. Hachurer la partie (P) du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équation $x = 3$ et $x = 6$, puis donner la valeur exacte de la mesure, exprimée en unités d'aire, de l'aire de (P).

annexe 2



Correction

PARTIE A

1. limite de f en 0.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2+10x-9\right)=-9\\ \lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$$

donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote (verticale) à la courbe (C).

2. On peut mettre x^2 en facteur dans l'expression de $f(x)$ car x est non nul :

$$f(x)=x^2\left(-1+\frac{10}{x}-\frac{9}{x^2}-\frac{8\ln x}{x^2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty}-1=-1\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{10}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-9}{x^2}=0\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-8\ln x}{x^2}=0\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-1+\dfrac{10}{x}-\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{8\ln x}{x^2}\right)=-1\\ \lim\limits_{x\to +\infty}x^2=+\infty\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=-\infty$$

3. Pour tout réel x de $]0;+\infty[$,

$$f(x)=-x^2+10x-9-8\ln x$$

$$f'(x)=-2x+10-\frac{8}{x}=\frac{-2x^2+10x-8}{x}=\frac{-2(x^2-5x+4)}{x}$$

$$\Delta=25-4\times1\times4=25-16=9>0$$

donc deux racines réelles distinctes pour x^2-5x+4 :

$$x_1=\frac{5-3}{2}=1\qquad x_2=\frac{5+3}{2}=4\quad\Rightarrow\quad x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$$

$$f'(x)=\frac{-2(x^2-5x+4)}{x}=\frac{-2(x-1)(x-4)}{x}$$

4. $f'(x)$ est du signe de $-(x-1)(x-4)$ car $x > 0$ sur $]0;+\infty[$.

le polynôme $-(x-1)(x-4)$ admet deux racines 1 et 4 est son signe est négatif à l'extérieur des racines et positif sinon.

5.

$f(1) = -1^2 + 10 - 9 - 8\ln 1 = -1 + 1 - 8\ln 1 = 0$

$f(4) = -4^2 + 40 - 9 - 8\ln 4 = -16 + 31 - 8\ln 4 = 15 - 8\ln 4$

x	0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	15-8ln4	↘	$-\infty$

6. a.

x	6,18	6,19	6,2	6,21
f(x)	0,0371	0,0004	-0,0364	-0,0734

b. Il est normal que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, 1 et α dans $]0;+\infty[$

sur [0 ; 4] voir tableau de variation c'est 0.

sur [4 ; + ∞[, la fonction *f* est strictement décroissante *f*(6,19) > 0 et *f*(6,2) < 0 donc la solution α est telles que 6,19 < α < 6,2.

c. voir graphique

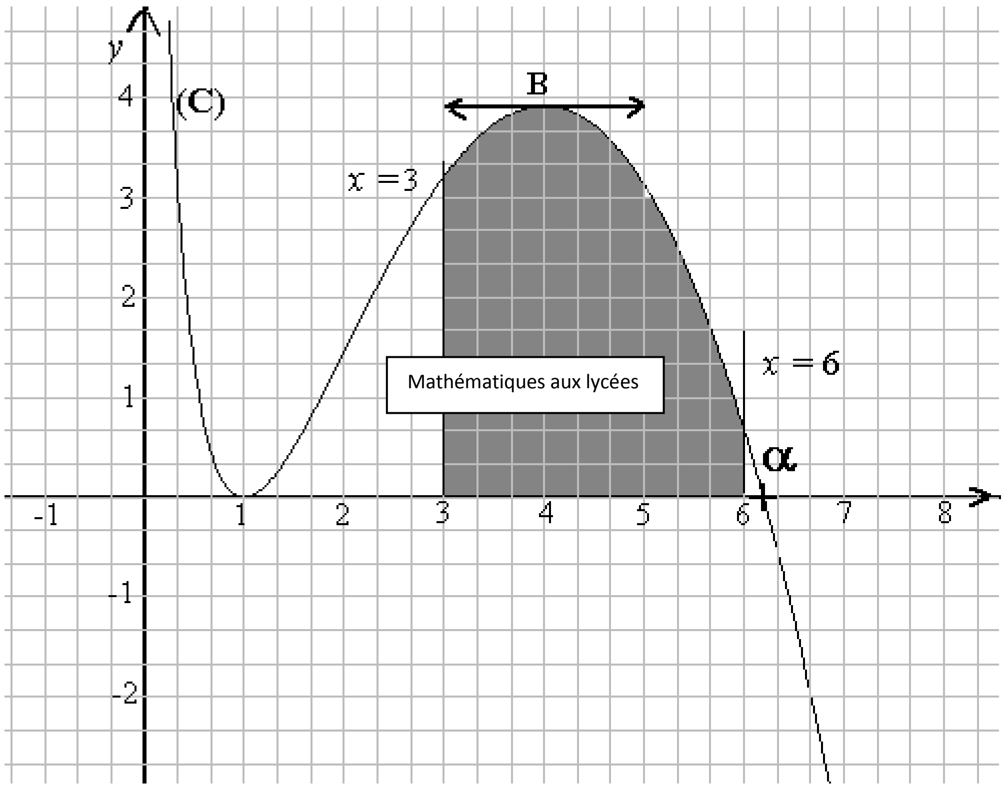
7

$$F'(x) = -\frac{3x^2}{3} + 10x - 1 - 8(\ln x + x \times \frac{1}{x}) = -x^2 + 10x - 1 - 8\ln x - 8$$
$$= -x^2 + 10x - 9 - 8\ln x = f(x)$$

donc F est une primitive de *f* sur]0;+ ∞[.

8. voir graphique .Sur l'intervalle [3 ;6] , la courbe représentative de *f*
est au dessus de l'axe des abscisses l'aire du domaine demandé (P)est donc en unité d'aire *:*

$$\int_3^6 f(x)dx = \left[F(x)\right]_3^6 = \left[-\frac{x^3}{3} + 5x^2 - x - 8x\ln x\right]_3^6$$
$$= \left(-\frac{6^3}{3} + 5\times 36 - 6 - 48\ln 6\right) - \left(-\frac{3^3}{3} + 5\times 9 - 3 - 24\ln 3\right)$$
$$= (-72 + 180 - 6 - 48\ln 6) - (-9 + 45 - 3 - 24\ln 3)$$
$$= 102 - 48\ln 6 - 33 + 24\ln 3 = 69 - 48\ln 6 + 24\ln 3 \; u.a.$$



Exercice 12

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

Soit la fonction *f* définie sur un intervalle I. On a déterminé expérimentalement des valeurs de *f* qui ont permis d'obtenir une partie de la courbe (C) , représentative de la fonction *f* , et sa tangente (T) au point O (voir feuille annexe)

Partie A :

1. A l'aide du graphique, déterminer *f*(0) et *f* '(0).

2. On admet que l'expression de $f(x)$ est de la forme $f(x) = ax + b - \ln(10x + 1)$ où a et b sont des réels.

a. Déterminer $f'(x)$ en fonction de a.

b. En utilisant les résultats du 1., déterminer les réels a et b.

Partie B :

On admet désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle I =]-0,1 ; 10] par :

$f(x) = 0{,}5x - \ln(10x + 1)$

1. Calculer

$$\lim_{\substack{x \to -0{,}1 \\ x > -0{,}1}} f(x)$$

Que peut - on en déduire pour la courbe (C) représentant f ?

2. Calculer la fonction f' dérivée de la fonction f. Montrer que $f'(x)$ a le même signe que $5x - 9{,}5$ sur l'intervalle I.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ a dans l'intervalle [6 ; 10] une solution unique, que l'on notera α.

Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5. Soit F la fonction définie sur l'intervalle I =]-0,1 ; 10] par :

$F(x) = 0{,}25\,x^2 + x - (x + 0{,}1)\ln(10x + 1)$.

a. Démontrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

b. Calculer l'intégrale

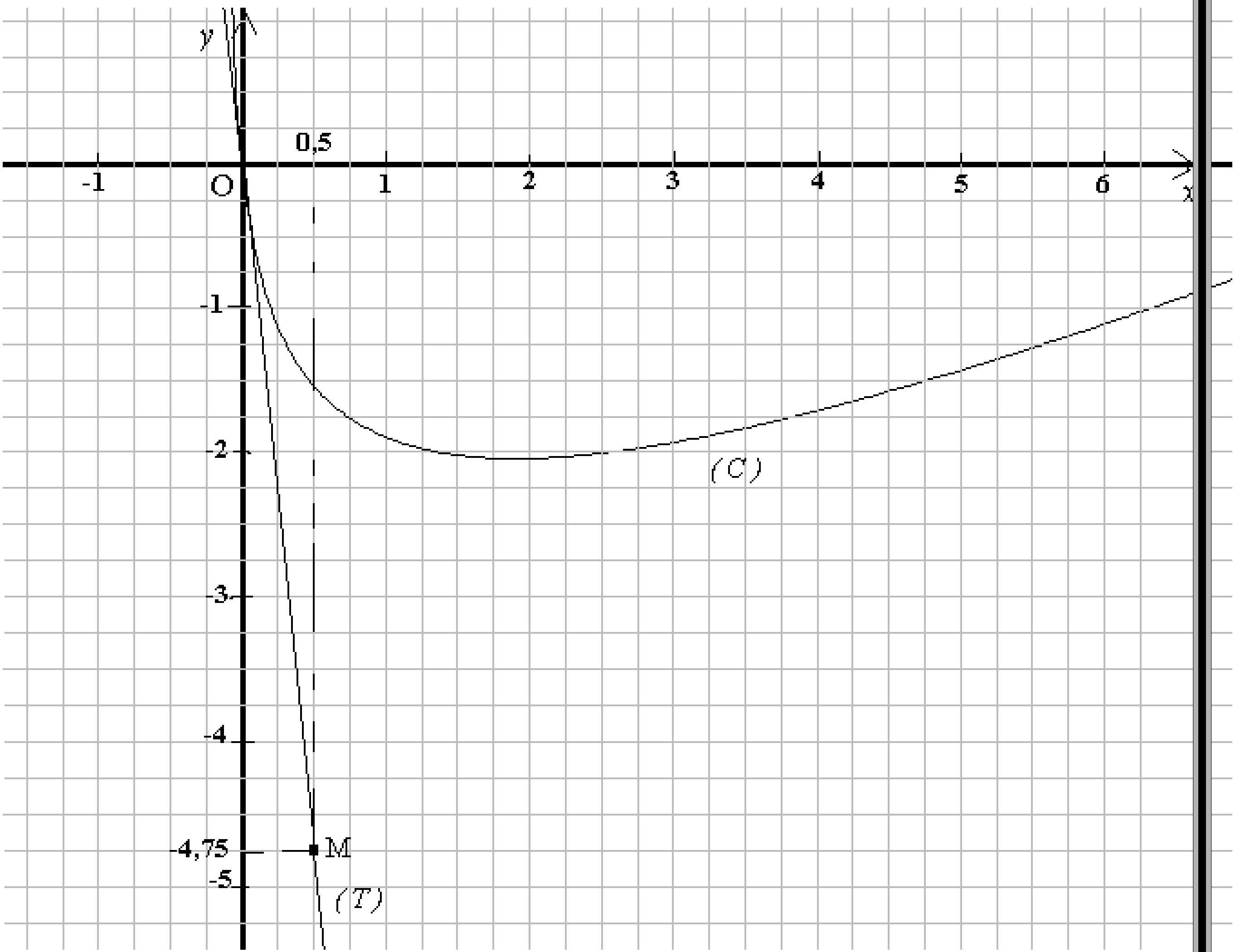
$$J = \int_0^1 f(x)\,dx$$.

On donnera sa valeur exacte.

c. On considère dans le repère défini initialement, l'ensemble des points M de coordonnées (x ; y) tels que :

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ f(x) \le y \le 0 \end{cases}$$

Utiliser la question précédente pour déterminer l'aire A en cm² de cette région. On en donnera la valeur décimale arrondie à 10^{-2} près.



Correction

Partie A :

1. La courbe (C) passe par le point O de coordonnées (0 ; 0) donc *f* (0) = 0

La tangente (T) passe par les point M de coordonnées (0 ; 0) et (0,5 ; - 4,75) donc son coefficient directeur est :

$$m = \frac{y_M - y_O}{x_M - x_O} = \frac{-4,75 - 0}{0,5 - 0} = \frac{-4,75}{0,5} = -9,5$$

on a donc *f* ' (0) = -9,5

2. ***a.***

$$f\,'(x) = a - \frac{10}{10x+1}$$

b.

f(*x*) = *ax* + *b* - ln(10*x* + 1) où a et b sont des réels.

f(0) = 0 équivaut à *b* - ln(1) = 0 soit *b* = 0

f ' (0) = -9,5 équivaut à

$$a - \frac{10}{1} = -9,5$$

soit a = 0,5, on a donc $f(x) = 0,5x - \ln(10x + 1)$

Partie B :

1. Calculer

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to -0,1\\ x>-0,1}} 10x+1=0\\ \lim\limits_{X\to 0}\ln X=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to -0,1\\ x>-0,1}}\ln(10x+1)=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to -0,1\\ x>-0,1}} -\ln(10x+1)=+\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to -0,1\\ x>-0,1}} 0,5x=-0,05\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x\to -0,1\\ x>-0,1}} f(x)=+\infty$$

La droite d'équation x = - 0,1 est asymptote (verticale) à la courbe (C) représentant f .

2.

$$f'(x)=0,5-\frac{10}{10x+1}=\frac{0,5(10x+1)-10}{10x+1}=\frac{5x+0,5-10}{10x+1}=\frac{5x-9,5}{10x+1}$$

$f'(x)$ a le même signe que $5x - 9,5$ sur l'intervalle I car sur I, $10x + 1 > 0$

3.

$5x - 9,5 > 0$ équivaut à $5x > 9,5$ équivaut à $x > 1,9$

$$f(1,9)=0,5\times 1,9-\ln(10\times 1,9+1)=0,95-\ln 20$$

$$f(10)=0,5\times 10-\ln(10\times 10+1)=5-\ln 101$$

x	-0,1		1,9		10
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0,95-ln20	↗	5-ln101

4.

$$f(6)=0,5\times 6-\ln(10\times 6+1)=3-\ln 61<0$$

$$f(10)=5-\ln 101>0$$

Sur l'intervalle [1 ; 6] la fonction f est strictement croissante et de plus $f(6) < 0 < f(10)$

donc l'équation $f(x) = 0$ a dans l'intervalle [6 ; 10] une solution unique α.

$f(9,02) < 0 < f(9,03)$ donc on en conclut que $9,02 < \alpha < 9,03$.

5. Pour tout réel x de I on a :

$$F(x)=0,25x^2+x-(x+0,1)\ln(10x+1)$$

$$F'(x)=2\times 0,25x+1-\left[1\times\ln(10x+1)+(x+0,1)\times\frac{10}{10x+1}\right]$$

$$=0,5x+1-\left[\ln(10x+1)+\frac{10x+1}{10x+1}\right]$$

$$=0,5x+1-\left[\ln(10x+1)+1\right]=0,5x+1-\ln(10x+1)-1$$

$$=0,5x-\ln(10x+1)=f(x)$$

donc F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

b.

$$J = \int_0^1 f(x)\,dx = \left[0,25\,x^2 + x - (x+0,1)\ln(10x+1)\right]_0^1$$

$$= \left[0,25 + 1 - (1,1)\ln(11) - (0)\right] = 1,25 - 1,1\ln(11)$$

c. On a A = - J *ua* = - 1,25 + 1,1 ln(1,1) *u.a* car la courbe (C) est au dessous de l'axe des abscisses sur [0 ; 1]
Une unité d'aire (u. a.) = 2 × 2 cm² = 4 cm²
donc l'aire est de 4(-1,25 + 1,1 ln(1,1)) soit -5 + 4,4 ln (1,1) soit environ 5,55 cm²

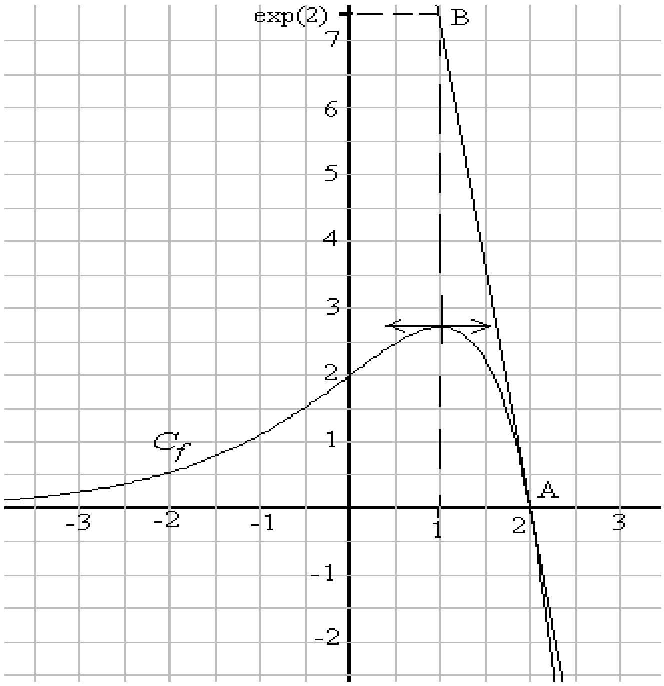
Exercice 13

La courbe ci-contre C_f est la représentation graphique d'une fonction f définie continue et dérivable sur]- ∞; 5/2] On note *f '* sa fonction dérivée et F la primitive de *f* qui vérifie F(1) = 2e.

On précise : * $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et pour tout $x < 0$, $f(x) > 0$.

*la tangente à la courbe au point A(2 ; 0) passe par le point B(1 ; e²).

*F(-3) = 6/e^3.



Pour chacune des huit affirmations, préciser si elle est vrai ou fausse

Affirmation 1 Pour tout $x \in$] - ∞; 2] , $f'(x) \geq 0$	Affirmation 5. $\int_0^2 f'(x)\,dx = -2$
Affirmation 2 Le nombre dérivé de la fonction *f* en 2 est *e*²	Affirmation 6 La fonction 1/*f* est définie sur] - ∞; 2]
Affirmation 3 La fonction F présente un maximum en 2.	Affirmation 7 La limite de la fonction 1/*f* en - ∞ est + ∞
Affirmation 4 L'aire de la partie du plan comprise entre C_f, l'axe des abscisses, les droite d'équation *x* = -3 ; *x*	Affirmation 8 La courbe représentative de la fonction 1/*f*

= 1 est égale (en unité d'aire) à $\dfrac{2e^4-6}{e^3}$	présente une asymptote d'équation $x = 2$

Correction

Affirmation 1 : Fausse

D'après le graphique, la fonction *f* est croissante sur] - ∞; 1] et décroissante sur [1 ; + ∞[par conséquent *f* '(*x*) n'est positive que sur l'intervalle] - ∞; 1]

Affirmation 2 : Fausse

La tangente à la courbe au point A(2 ; 0) passe par le point B(1 ; e²) la tangente à la courbe au point A(2 ; 0) passe par le point B(1 ; e²) donc son coefficient directeur est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{e^2 - 0}{1-2} = -e^2$$

par conséquent $f'(2) = -e^2$ (le coefficient directeur est négatif c'était prévisible)

Affirmation 3 : Vrai

La courbe représentative de *f* coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées (2 ; 0) donc *f*(2) = 0 d'où F'(2) = 0 et la courbe représentative de *f* est au dessus de l'axe des abscisses sur] - ∞; 2] et au dessous de l'axe des abscisses sur [2 ; + ∞[par conséquent :

$F'(x) = f(x) \geq 0$ si *x* appartient à] - ∞; 2] , F croissante sur] - ∞; 2]

et $F'(x) = f(x) \leq 0$ si *x* appartient à [2 ; + ∞[, F décroissante sur [2 ; + ∞[

Affirmation 4 : Vrai ,

l'aire en unité d'aire du domaine est :

$$\int_{-3}^{1} f(x)dx = F(1) - F(-3) = 2e - \frac{6}{e^3} = \frac{2e^4-6}{e^3}$$

Affirmation 5 : Vrai

$$\int_0^2 f'(x)dx = \left[f(x)\right]_0^2 = f(2) - f(0) = 0 - 2 = -2$$

Affirmation 6 : Fausse

la fonction *f* est définie sur] - ∞; 2] mais s'annule en 2 donc la fonction 1/*f* n' est pas en 2 donc elle n'est pas définie sur] - ∞; 2].

Affirmation 7 : Vrai

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

Affirmation 8 : Vrai

f(2) = 0 et *f* continue en 2.

Exercice 14

L'objectif de cet exercice est de démontrer la propriété algébrique fondamentale de la fonction logarithme népérien notée ln.

Propriété fondamentale :

Pour tous réels strictement positifs *a* et *b* , ln(*ab*) = ln *a* + ln *b*

Rappels

On rappelle les résultats de cours auxquels fera clairement réference pour justifier chacune de ses affirmations au cours des étapes de la démonstration (on pourra en rappeler le numéro) .

Théorème 1 : Sur un intervalle I, deux primitives d'une fonction diffèrent d'une constante.

Théorème 2 : Soit *u* une fonction définie dérivable et strictement positive sur un intervalle I, la fonction composée définie par $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I de dérivée la fonction $x \mapsto u'(x)/u(x)$

Théorème 3 : La somme f de deux fonctions dérivables u et v sur un même intervalle I est dérivable sur I et $f' = u' + v'$

Définition : ln 1 = 0

Enoncé de l'exercice

a est un réel constant strictement positif .

On considère les fonctions f et g, de variable x, définies sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(ax)$ et $g(x) = \ln a + \ln x$

Partie 1

Dans le cas ou $a = 2$, donner les fonctions dérivées de $f : x \mapsto \ln(2x)$ et

$g : x \mapsto \ln 2 + \ln x$.

Partie 2 : Démonstration de la propriété

1. Calculer et comparer les dérivées de f et de g dans le cas général où a est un réel constant strictement positif.

2. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe un réel k tel que, pour tout $x \in]0 ; +\infty[$,

$f(x) = g(x) + k$?

3. En posant $x = 1$, déterminer la valeur de k.

4. Justifier la propriété fondamentale de la fonction ln énoncée en début d'exercice.

Correction

Partie 1

La fonction définie par $x \mapsto 2x$ est définie , dérivable et strictement positive sur

$]0 ; +\infty[$ donc le théorème 2 la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(2x)$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout réel x strictement positif on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

La fonction g définie par $g(x) = \ln x + \ln 2$ est somme de deux fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$

la fonction ln de dérivée $x \mapsto 1/x$ et la fonction constante $x \mapsto \ln 2$ de dérivée $x \mapsto 0$, donc on a d'après le théorème 3 pour tout réel x strictement positif :

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}$$

Partie 2 :

1.

La fonction définie par $x \mapsto ax$ est définie , dérivable et strictement positive sur

$]0 ; +\infty[$ donc le théorème 2 la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(ax)$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout réel x strictement positif on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x} \ (\text{car } a > 0)$$

La fonction g définie par $g(x) = \ln x + \ln a$ est somme de deux fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$

la fonction ln de dérivée $x \mapsto 1/x$ et la fonction constante $x \mapsto \ln a$ de dérivée $x \mapsto 0$, donc on a d'après le théorème 3 pour tout réel x strictement positif :

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

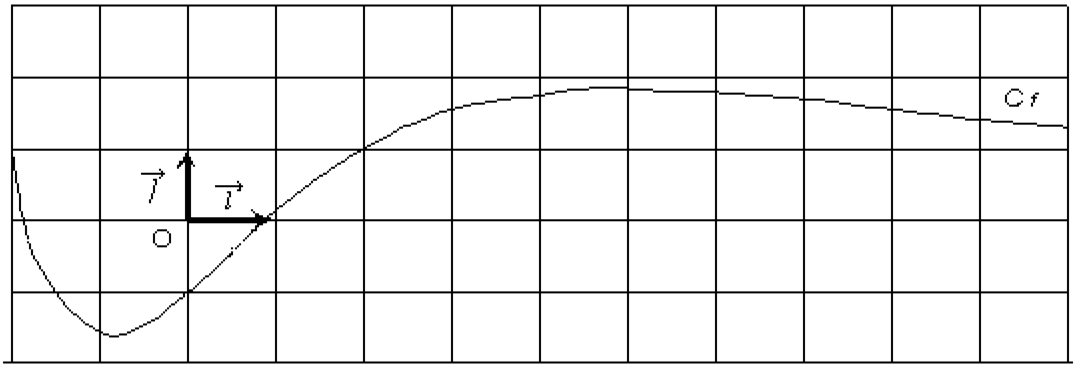
Dans le cas général où a est un réel constant strictement positif, pour tout réel x strictement positif on a : $f'(x) = g'(x) = 1/x$

2. Les fonctions f et g sont donc des primitives de la fonction $x \mapsto 1/x$ sur $]0 ; +\infty[$, puisque $f'(x) = g'(x) = 1/x$ d'après le théorème 1, elle diffèrent donc d'une constante :

il existe un réel k tel que pour tout réel x strictement positif :
$f(x) - g(x) = k$ soit encore $f(x) = g(x) + k$
3.
il existe un réel k tel que pour tout réel x strictement positif :
$f(x) - g(x) = k$ soit encore $f(x) = g(x) + k$ donc c'est vrai en particulier pour $x = 1$:
$f(1) = g(1) + k$
$\ln a = \ln 1 + \ln a + k$
or $\ln 1 = 0$ par définition
$\ln a = \ln a + k$ d'où $k = 0$.
4. Pour tout réel x strictement positif et pour tout réel a strictement positif on a donc :
$f(x) = g(x)$
$\ln(ax) = \ln x + \ln a$, en posant $x = b$ on retrouve la propriété fondamentale.

Exercice 15

Soit f une fonction définie et dérivable sur [-2 ; 10].
La courbe C_f ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormal.



On précise que le point d'abscisse 4,83 de C_f a pour ordonnée 1,86 et que cette valeur est le maximum de a fonction f .
On note C_F la courbe représentative de la primitive F de f qui s'annule en 1. On précise que le point A (5 ; 5,43) appartient à CF .
On note $C_{f'}$ la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f .
Toutes les estimations graphiques seront données à 0,25 près. Les résultats des calculs numériques seront arrondis à 10^{-2}.

1. a. Déterminer graphiquement sur quel(s) intervalle(s) $C_{f'}$ est située en dessous de l'axe des abscisses.
b. Déterminer, en justifiant, l'équation réduite de la tangente à C_F en A.
c. Préciser, en justifiant, le sens de variation de F sur l'intervalle [-2 ; 10].
2. a. Déterminer

$$\int_1^5 f(t)dt$$

b. Rappeler la formule de la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle [a ;b] et donner une interprétation de cette notion dans le cas où f est positive.
c. Donner la valeur moyenne de f sur l'intervalle [1 ; 5].

Correction

1.a. Le(s) intervalle(s) où $C_{f'}$ est située en dessous de l'axe des abscisses sont le(s) intervalle(s) où f' est négative c'est à dire les intervalles ou la fonction d est décroissante.

l'intervalle correspondant est donc [-2 ; - 0,75]

1.b. Coefficient directeur de la tangente au point A d'abscisse 5 de C_F :

F'(5) = *f*(5) = 1,8

Ordonnée du point A :

F(5) = 5,43

Equation de la tangente au point A d'abscisse 5 :

y = F'(5)(*x* - 5) + F(5)

y = 1,8(*x* - 5) + 5,43

y = 1,8*x* - 9 + 5,43

y = 1,8*x* - 3,57

1.c.

C*f* en dessus de l'axe des abscisses sur [-2 ; -1,8] $\cup$[0,8 ; 10]

f est la dérivée de la fonction F sur [-2 ; 10] donc

F croissante sur [-2 ; -1,8] et sur [0,8 ; 10] et

F est décroissante [-1,8 ; 0,8]

2.a.

$$\int_1^5 f(t)dt = \left[F(t)\right]_1^5 = F(5) - F(1) = 5,43 - 0 = 5,43$$

2.b.

la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle [*a* ; *b*] est le nombre réel μ défini par

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

dans le cas où la fonction *f* est positive elle correspond à la hauteur d'un rectangle délimité par les droites d'équation *x* = *a* et *x* = *b* qui aurait la même aire que le domaine délimité la courbe représentative de *f* , les droites d'équation *x* = *a* et *x* = *b* et l'axe des abscisses.

2.c.

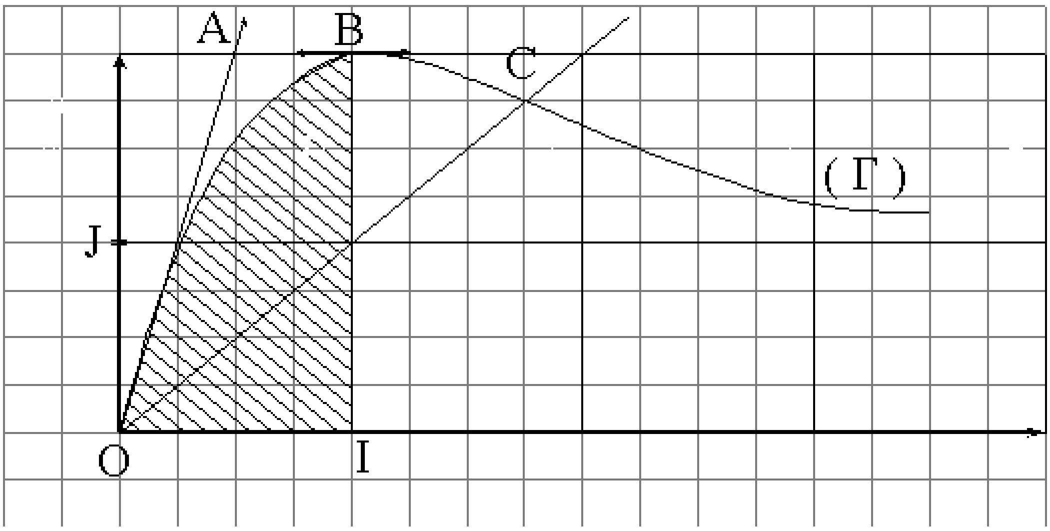
$$\frac{1}{5-1}\int_1^5 f(x)dx = \frac{5,43}{4} = 1,3575$$

Exercice 16

Dans un repère orthonormal du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm, la courbe (Γ), tracée ci-dessous, est la représentation graphique d'une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle

[0 ; 3,5].

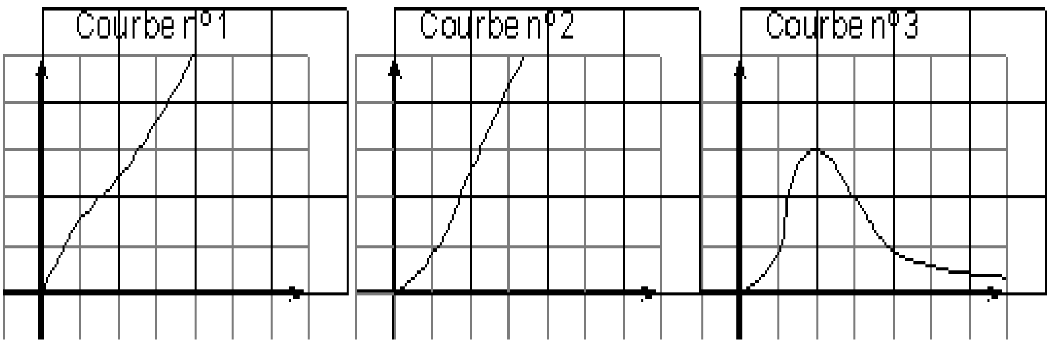
- I et J sont les points du plan tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$;
- C est le point de (Γ) situé sur la bissectrice de $\widehat{IOJ}$
- (OA) est la tangente en O à (Γ) ;
- S est la surface hachurée sur la figure ci-dessous :



1. Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :
a. Quel est le tableau de variations de g sur [0 ; 3,5]?
b. Quelles sont les valeurs de g '(0) et de g '(1) ?
c. Quelles sont les coordonnées du point C?
d. Résoudre l'inéquation g (x) $\geq$ x sur [0 ; 3,5].
2. Définir la surface S par un système d'inéquations et déterminer graphiquement un encadrement de l'aire de S d'amplitude 2 cm².
Rappel : l'aire d'un trapèze est donnée par la formule:

$$A = \frac{(B+b)h}{2}$$

B et b sont les bases du trapèze et h sa hauteur.
3. On suppose que l'une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la primitive de la fonction g s'annulant en 0. En justifiant l'élimination de deux des courbes, indiquer celle qui est la représentation graphique de cette primitive.



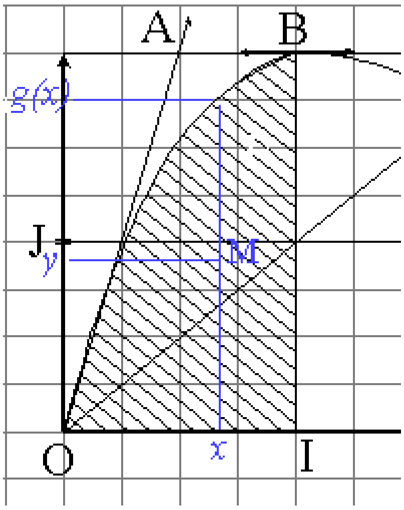
Correction

1.a.

x	0		1		$3{,}5$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$1{,}15$

b. g '(0) est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0, par lecture graphique on lit : g'(0) = 4.
et de g '(1) est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1, or cette tangente est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est nul :
g'(1) = 0.
c. Le point C a pour coordonnée (7/4 ; 7/4)
d. La courbe représentative de la fonction g est au dessus de la droite d'équation $y = x$ sur l'intervalle [0 ; 7/4] , donc l'ensemble des solutions de l'inéquation g (x) $\geq$ x sur[0 ; 3,5] est [0 ; 7/4].
2. S est l'ensemble des points M de coordonnées (x ; y) tels que :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq g(x) \end{cases}$$



l'aire de S est encadrée par l'aire du triangle OBI et l'aire du trapèze OABI

$$Aire(OBI) = \frac{OI \times IB}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1u.a = 1 \times 4\ cm^2 = 4\ cm^2$$

$$Aire(OABI) = \frac{(AB + OI) \times IB}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2} + 1\right) \times 2}{2} =$$

$$\frac{3}{2} u.a = \frac{3}{2} \times 4\ cm^2 = 6\ cm^2$$

$$4 \leq Aire(S) \leq 6$$

3. Soit G une primitive de la fonction g , g est donc la dérivée de G et d'après ce qui précéde on doit avoir G croissante puisque g est positive sur l'intervalle [0 ; 3,5]
donc on élimine la courbe n° 3 qui ne vérifie pas ces conditions.
On sait que G'(0) = g(0) = 0 donc la courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0 de la courbe, ce qui élimine le choix de la courbe n° 1.
La bonne réponse est la courbe n° 2.

Exercice 17

L'objet de cet exercice est de démontrer le résultat suivant :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction *f* définie sur]0 ; + ∞[par :

$$f(x) = \ln x - \sqrt{x}$$

1. Calculer *f* '(*x*) et montrer que l'on a :

$$f'(x) = \frac{2 - \sqrt{x}}{2x}.$$

2. En déduire le tableau de variations de *f* sur]0 ; + ∞[(les limites aux bornes ne sont pas demandées).

3. Justifier alors que, pour tout *x* de]0 ; + ∞[,on a :

$$\ln x \leq \sqrt{x}$$

Partie B:

1. Démontrer que, pour tout réel *x* strictement supérieur à 1, on a :

$$0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

2. Déterminer :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

En déduire

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

On rappelle que la dérivée de la fonction

$$x \mapsto \sqrt{x} \quad \text{est } x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Correction

Partie A :

1. La fonction f est dérivable sur]0 ; + ∞[et pour tout réel x strictement positif on a :

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{2x} - \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{2 - \sqrt{x}}{2x}$$

2.

f '(*x*) est du signe de 2 - $\sqrt{x}$, car *x* > 0 sur]0 ; + ∞[

étudions le signe de 2 - $\sqrt{x}$

2 - $\sqrt{x}$ > 0 si

2 > $\sqrt{x}$ si

$4 > x \geq 0$

on en déduit les variations de *f* sur $]0\,;+\infty[$

$f(4) = \ln 4 - 2 < 0$

x	0		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$\nearrow$	$\ln 4 - 2$	$\searrow$	

f admet un maximum absolue sur $]0\,;+\infty[$ qui est égal à $\ln 4 - 2 < 0$ pour $x = 4$ donc pour tout réel *x* de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ on a :

$f(x) \leq 0$ par conséquent : $\ln x - \sqrt{x} \leq 0$ d'où $\ln x \leq \sqrt{x}$

Partie B :

1. en divisant par $x > 0$ les 2 membres de l'inégalité $\ln x \leq \sqrt{x}$ on obtient :

$$\frac{\ln x}{x} \leq \frac{\sqrt{x}}{x}$$

c'est à dire encore :

$$\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

si de plus $x > 1$ alors $\ln x > 0$ et $x > 0$ par conséquent :

$$0 \leq \frac{\ln x}{x}$$

conclusion pour tout réel $x > 1$ on a :

$$0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

2.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

le théorème de comparaison des " gendarmes " permet de conclure

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq \dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}} \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x \to +\infty} 0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Exercice 18

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Soit *f* la fonction définie sur]-1 ; + ∞[par : $f(x) = x^2 - 2{,}2x + 2{,}2\ln(x+1)$
1. Faire apparaître sur l'écran de la calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $-2 \leq x \leq 4$, $-5 \leq y \leq 5$.
Reproduire sur la copie l'allure de la courbe obtenue grâce à la calculatrice.
2. D'après cette représentation graphique, que pourrait-on conjecturer :
a. Sur les variations de la fonction *f* ?
b. Sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?
3. On se propose maintenant d'étudier la fonction *f*
a. Étudier le sens de variation de la fonction *f*
b. Étudier les limites de la fonction *f* en -1 et en + ∞, puis dresser le tableau de variations de *f* .
c. Déduire de cette étude, en précisant le raisonnement, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
d. Les résultats aux questions 3. a. et 3. c. confirment-ils les conjectures émises à la question 2.?
4. On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative de la fonction *f* sur l'intervalle [-0,1 ; 0,2], de façon à visualiser les résultats de la question 3..
a. Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée *y* proposez-vous pour mettre en évidence les résultats de la question 3. c. dans la fenêtre de votre calculatrice?
b. À l'aide de la calculatrice déterminer une valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de la plus grande solution α de l'équation $f(x) = 0$.
5. Soit F la fonction définie sur]-1 ; + ∞[par

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1{,}1x^2 - 2{,}2x + 2{,}2(x+1)\ln(x+1)$$

a. Démontrer que F est une primitive de *f* sur]-1 ; + ∞[.
b. Interpréter graphiquement l'intégrale :

$$\int_0^\alpha f(x)dx$$

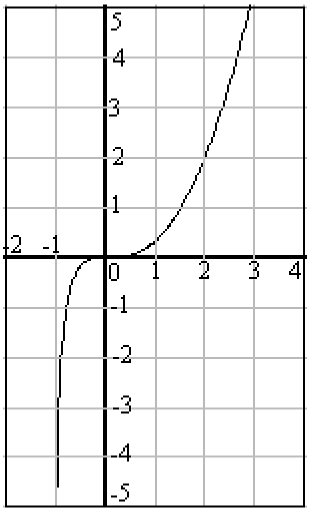
c. Calculer

$$\int_0^\alpha f(x)dx$$

et exprimer le résultat sous la forme b α^3 +c α^2 (b et c réels).

Correction

1.



2. a. Sur l'intervalle]-1 ; 4] la fonction semble être croissante.
b. La courbe semble couper l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse 0, on peut donc penser que la fonction s'annule seulement pour $x = 0$.
3. a.

$$f(x) = x^2 - 2,2x + 2,2\ln(x+1)$$

$$f'(x) = 2x - 2,2 + \frac{2,2}{x+1} = \frac{(2x-2,2)(x+1)+2,2}{x+1}$$

$$= \frac{2x^2+2x-2,2x-2,2+2,2}{x+1} = \frac{2x^2-0,2x}{x+1} = \frac{2x(x-0,1)}{x+1}$$

$f'(x)$ est du signe du trinôme $x(x - 0,1)$ car 2 et $x + 1$ sont positif sur l'intervalle $]-1 ; +\infty[$.
f est donc strictement croissante sur les intervalles]-1 ; 0] et $[0,1 ; +\infty[$
f est strictement décroissante sur l'intervalle [0 ; 0,1]
3.b.

en posant $X = x + 1$, quand x tend vers -1^+, X tend vers 0^+

$$\lim_{x \to -1^+} \ln(x+1) = \lim_{X \to 0^+} \ln X = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^+} 2,2\ln(x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} x^2 - 2,2x = 3,2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$$

$$f(x) = x^2 - 2,2x + 2,2\ln(x+1) = x^2\left[1 - \frac{2,2}{x}\right] + 2,2\ln(x+1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 2,2\ln(x+1) = +\infty \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{2,2}{x} = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left[1 - \dfrac{2,2}{x}\right] = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

b. Extremum : $f(0) = 0$; $f(0,1) = 0,01 - 0,22 + 2,2\ln(1,1) = -0,21 + 2,2\ln(1,1)$

x	-1		0		$0,1$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-0,21+2,2\ln(1,1)$	↗	$+\infty$

c. la fonction *f* est strictement croissante sur $[0,1\ ;\ +\infty[$ de plus $f(0,1) < 0$ et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[0,1\ ;\ +\infty[$

sur l'intervalle $]-1\ ;\ 0,1]$ *f* admet 0 comme maximum absolu, il est atteint seulement pour $x = 0$.

On peut donc en conclure que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions , l'une qui est 0 et l'autre $\alpha \in [0,1\ ;\ +\infty[$.

d. les résultats des questions 3.a. et 3.c. ne confirme absolument pas la conjecture faite à la question 2.

4. a. Il suffit de prendre $y_{min} < -0,21 + 2,2\ln(1,1) \approx -0,0003$ soit $y_{min} \approx -0,0004$ et $y_{max} \approx 0,0001$

4.b. On obtient $f(0,15) < 0 < f(0,16)$ donc $0,15 < \alpha < 0,16$.

L'approximation décimale par défaut à 10^{-2} de α est 0,15.

5.a.

F est dérivable sur $]-1\ ;\ +\infty[$ et pour tout réel *x* on a :

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1,1x^2 - 2,2x + 2,2(x+1)\ln(x+1)$$

$$F'(x) = \frac{1}{3}3x^2 - 2\times 1,1x - 2,2 + 2,2\left(\ln(x+1) + (x+1)\times\frac{1}{x+1}\right)$$

$$= x^2 - 2,2x - 2,2 + 2,2\left(\ln(x+1)+1\right)$$

$$= x^2 - 2,2x + 2,2\ln(x+1) = f(x)$$

donc *f* est une primitive de la fonction F sur $]-1\ ;\ +\infty[$

5.b.

Sur l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$, la fonction *f* est décroissante donc pour tout réel *x* de $[0\ ;\ \alpha]$ on a :

$0 \le x \le \alpha$ donc $f(0) \ge f(x) \ge f(\alpha)$ soit $f(x) \le 0$

donc l'intégrale représente l'opposé de l'aire en unité d'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de *f* , l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$

5.c.

$$\int_0^\alpha f(x)dx = [F(x)]_0^\alpha = \left[\frac{1}{3}x^3 - 1{,}1x^2 - 2{,}2x + 2{,}2(x+1)\ln(x+1)\right]_0^\alpha$$

$$= \frac{1}{3}\alpha^3 - 1{,}1\alpha^2 - 2{,}2\alpha + 2{,}2(\alpha+1)\ln(\alpha+1)$$

on sait que $f(\alpha) = 0$ soit :

$$\alpha^2 - 2{,}2\alpha + 2{,}2\ln(\alpha+1) = 0$$

donc $\ln(\alpha+1) = \dfrac{2{,}2\alpha - \alpha^2}{2{,}2} = \alpha - \dfrac{\alpha^2}{2{,}2}$

$$\int_0^\alpha f(x)dx = \frac{1}{3}\alpha^3 - 1{,}1\alpha^2 - 2{,}2\alpha + 2{,}2(\alpha+1)\left(\alpha - \frac{\alpha^2}{2{,}2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\alpha^3 - 1{,}1\alpha^2 - 2{,}2\alpha + 2{,}2\alpha^2 - \alpha^3 + 2{,}2\alpha - \alpha^2$$

$$= \frac{-2}{3}\alpha^3 + 0{,}1\alpha^2$$

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $]-1 ; +\infty[$ par
$f(x) = -x + \ln(2x+2) - \ln(x+2)$.
On appelle (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (4 cm pour une unité en abscisses et 8 cm pour une unité en ordonnées).

Préliminaires :

1. Montrer que sur $]-1 ; +\infty[$, $(2x+2) > 0$ et $(x+2) > 0$

2. Etudier le signe de $x^2 + 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que sur l'intervalle $]-1 ; +\infty[$, $x^2 + 3x + 1$ s'annule pour une et une seule valeur α dont on donnera la valeur exacte.

Partie A :

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$. Que peut-on en déduire graphiquement ?

2.

2.a. Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = -x + \ln 2 + \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$$

2.b. Déterminer alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

2.c. Montrer que la droite D d'équation $y = -x + \ln(2)$
est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

2.d. Déterminer la position de (C) par rapport à la droite D sur $]-1 ; +\infty[$

Partie B :

1. Calculer la dérivée f' de f et montrer que :

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 3x + 1}{(x+1)(x+2)}$$

2. A l'aide des résultats obtenus dans les préliminaires,
étudier le signe de f' sur]-1 ; + ∞[.
3. Construire le tableau de variation de la fonction f (on se contentera d'une valeur décimale approchée à 10^{-1} près de l'extremum de f)

Partie C :
1. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans l'intervalle [-0,8 ; -0,4], une solution unique notée β. Donner une encadrement à 10^{-2} près de β.
2. Déterminer une équation de la droite T tangente à (C) au point d'abscisse 0.
3. Reproduire et compléter le tableau suivant : (on donnera les résultats arrondis à 10^{-1} près).

x	-0,8	$\frac{\sqrt{5}-3}{2}$	0	0,5	1	2
$f(x)$						

4. Représenter graphiquement la droite T, les asymptotes et (C) dans le repère donné.

Correction-

Préliminaires :
1.
sur]-1 ; + ∞[, $x > -1$ donc $2x > -2$ par conséquent $2x + 2 > 0$
sur]-1 ; + ∞[, $x > -1$ donc $x + 2 > 1 > 0$
2. $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 1 = 9 - 4 = 5 > 0$ donc le trinôme $x^2 + 3x + 1$ admet 2 racines réelles disctintes :

$$x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$$

et il est positif à l'extérieur de ses racines :

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2+3x+1		+	0	-	0	+	

$$4 < 5 < 9 \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow -1 < -3+\sqrt{5} < 0 \Rightarrow -1 < \frac{-1}{2} < \frac{-3+\sqrt{5}}{2} < 0$$

$$2 < \sqrt{5} < 3 \Rightarrow -2 > -\sqrt{5} > -3 \Rightarrow -1 > \frac{-5}{2} > \frac{-3-\sqrt{5}}{2} > -3$$

$$donc \ \boxed{\frac{-3-\sqrt{5}}{2} < -1 < \frac{-3+\sqrt{5}}{2}}$$

sur]-1 ; + ∞[, $x^2 + 3x + 1$ s'annule pour :

$$\alpha = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$$

$\alpha \simeq -0,38$.
sur]-1 ; + ∞[, $x^2 + 3x + 1 > 0$ si et seulement si $x > \alpha$.

Partie A :

1.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1}(-x)=1\\ \lim\limits_{x\to -1^{+}}(2x+2)=0^{+}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1^{+}}\ln(2x+2)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -1}\ln(x+2)=\ln 1=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\infty$$

on en déduit que la droite d'équation x = -1 est asymptote à la courbe (C)

2.

2.a.

$$f(x)=-x+\ln(2x+2)-\ln(x+2)$$
$$=-x+\ln 2(x+1)-\ln(x+2)$$
$$=-x+\ln 2+\ln(x+1)-\ln(x+2)$$
$$=-x+\ln 2+\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$$

2. b.

$$\text{pour } x\neq 0,\ \frac{x+1}{x+2}=\frac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}=\frac{1+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} 1+\dfrac{1}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to +\infty} 1+\dfrac{2}{x}=1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}=1$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)=\ln 1=0\\ \lim\limits_{x\to +\infty} -x+\ln 2=-\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$$

2.c.

$$f(x)-(-x+\ln 2)=\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$$

$$\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=0\Rightarrow$$

donc la droite d'équation $y = -x + \ln(2)$ est une asymptote à la courbe (C) en + ∞.

2.d.

Sur]-1 ; + ∞[, $0 < x + 1 < x + 2$ donc :

$$0<\frac{x+1}{x+2}<1\Rightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)<\ln 1=0$$

par conséquent $f(x) - (-x + \ln 2) < 0$ sur]-1 ; + ∞[, par conséquent la courbe (C) est en dessous de la droite D sur l'intervalle]-1 ; + ∞[.

Partie B :

1. *f* est dérivable sur]-1 ; + ∞[et pour tout réel *x* de l'intervalle]-1 ; + ∞[on a :

$$f'(x) = \frac{-(x+1)(x+2)+(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{-(x^2+2x+x+2)+x+2-x-1}{(x+1)(x+2)} = \frac{-(x^2+3x+2)+1}{(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{-x^2-3x-2+1}{(x+1)(x+2)} = \frac{-x^2-3x-1}{(x+1)(x+2)} = -\frac{x^2+3x+1}{(x+1)(x+2)}$$

2. d'après les préliminaire (x + 1) et (x + 2) sont strictement positifs sur]-1 ; + ∞[, donc $f'(x)$ est du signe de $-(x^2 + 3x + 1)$.

3.

Valeur approchée à 10^{-1} près de $f(\alpha)$.

$f(\alpha) \simeq 0,1$

Si vous tenez à calculer vraiment la valeur exacte ...

$$f(\alpha) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \ln 2 + \ln\left(\frac{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}+1}{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}+2}\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \ln 2 + \ln\left(\frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)$$

$$= \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \ln 2 + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \ln 2 + \ln\left(\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}\right)$$

$$= \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \ln 2 + \ln\left(\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \ln 2 + 2\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

$$= \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \ln 2 + 2\ln\left(\sqrt{5}-1\right) - 2\ln 2$$

$$= \frac{3-\sqrt{5}}{2} - \ln 2 + 2\ln\left(\sqrt{5}-1\right)$$

Tableau de variation de la fonction f

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\alpha) \simeq 0,1$	↘	$-\infty$

Partie C :

1.

$f(-0,8) \simeq -0,30 < 0$

$f(-0,4) \simeq 0,11 > 0$

f est dérivable sur l'intervalle]-0.8 ; -0,4 [

$f'(x) > 0$ sur l'intervalle]-0.8 ; -0,4 [donc la fonction f est strictement croissante sur]-0.8 ; -0,4 [de plus $f(-0,8) \simeq -0,30 < 0$ et $f(-0,4) > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β sur l'intervalle]-0.8 ; -0,4 [.

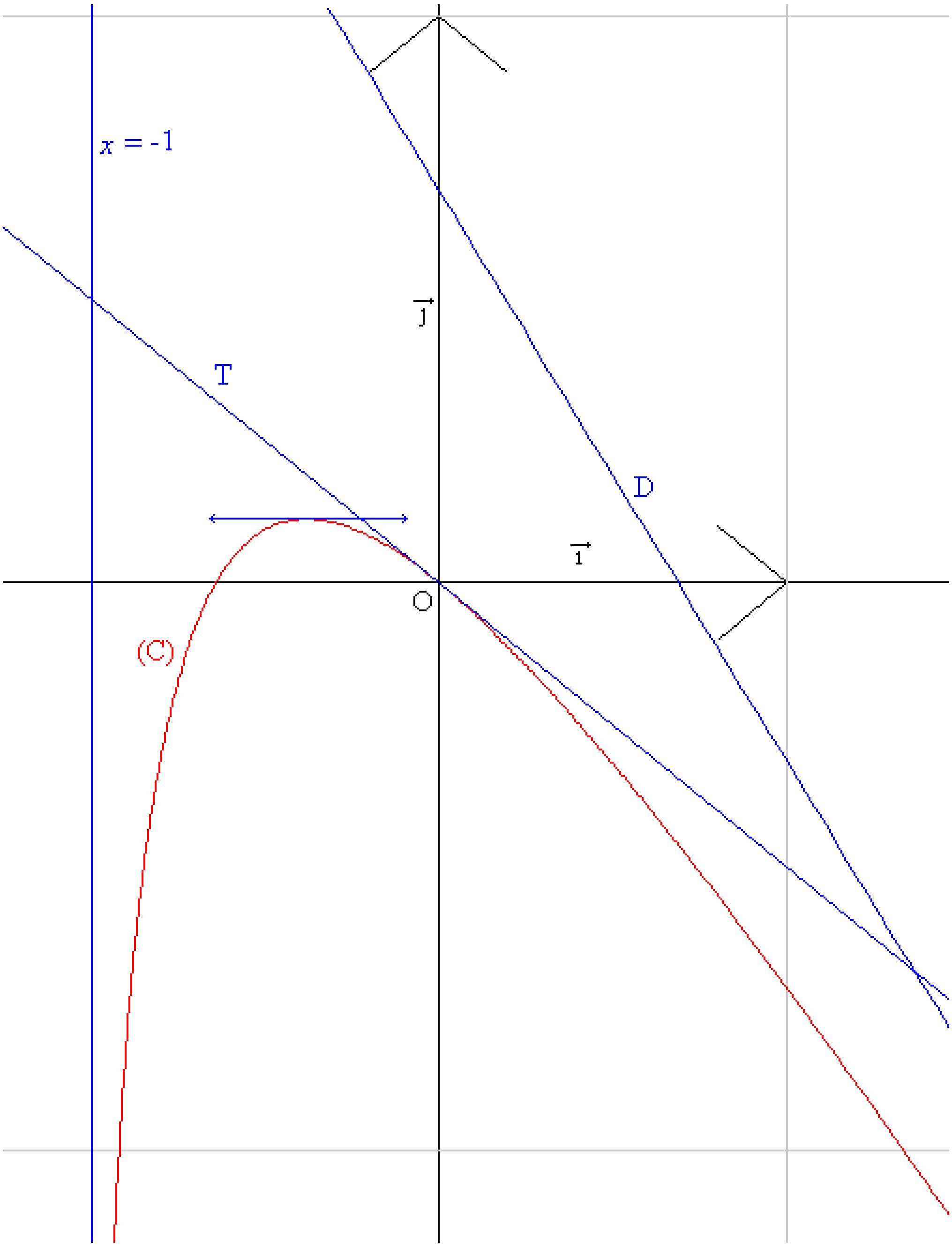
$f(-0,64) > 0$ et $f(-0,65) < 0$ donc $-0,65 < \beta < -0,64$

2.

Coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 :

$f'(0) = 1/2$
Ordonnée du point d'abscisse 0 :
$f(0) = \ln 2 - \ln 2 = 0$
L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est donnée par la formule :
$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
$y = x/2$
T : $y = x/2$
3.

x	-0,8	$\frac{\sqrt{5}-3}{2}$	0	0,5	1	2
$f(x)$	-0,3	0,1	0	-0,3	-0,7	-1,6

4.


Exercice 20

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle
I =] 0 ; + ∞[par g(x) = x² - 2lnx.
1) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
(On ne demande pas de calculer les limites aux bornes de I)
2) En déduire que pour tout réel strictement positif :
g(x) > 0

Partie B

Soit la fonction f définie sur l'intervalle I par :
$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$$
On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 2cm.
1) a) Etudier la limite de f en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe (C)
b) En remarquant que f(x) peut s'écrire :
$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$
étudier la limite de f en + ∞ .
2) a) Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle I,
$$f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$$
b) Déduire de la partie A, le signe de f '(x), puis le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle I
c) Dresser le tableau de variation de f.
3) Soit (D) la droite d'équation
$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$
a)Montrer que la droite (D) est asymptote à la courbe
(C).
b) Déterminer par le calculs les coordonnées du point d'intersection de la courbe (C) et de la droite (D)
c) Sur l'intervalle I, déterminer la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D)
4) Construire avec soin, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite (D) et la courbe (C)
Partie C
On considère la fonction h définie sur l'intervalle I par :
$$h(x) = \frac{\ln x}{x}$$
1) En remarquant que h(x) est de la forme u'(x) u(x) , déterminer une primitive de la fonction h.
2. On considère la partie du plan limitée par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équation : x = 1/e et x = e² Hachurer cette partie de plan, puis

calculer son aire en cm² .

Correction

Partie A

1) g est dérivable sur] 0 ; + ∞[et pour tout réel *x* appartenant à] 0 ; + ∞[on a :

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2-2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

sur l'intervalle]0 ; + ∞[, 2(x + 1) et x sont strictement positif donc g'(x) est du signe de (x -1) on en déduit les variations de g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$		↘	1	↗	

2) g(1) = 1 - 2ln 1 = 1 > 0

g admet un minimum absolu en x = 1 qui est g(1) = 1

donc pour tout réel x appartenant à] 0 ; + ∞[

g(x) > 0.

Partie B

1) a)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(1+\ln x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{1+\ln x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = \frac{-3}{2}$$

$$donc \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

interprétation graphique la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation *x = 0.*

b)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

2) a) f est dérivable sur I et pour tout réel x appartenant à I on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (1+\ln x)}{x^2} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1-1-\ln x}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{\ln x}{x} =$$

$$\frac{x^2}{2x^2} - \frac{2x\ln x}{2x^2} = \frac{x^2 - 2x\ln x}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$$

b) g(x) et 2x² sont strictement positif sur I par conséquent
f '(x) est strictement positif on en conclu que f est croissante sur I.

c)

x	0	$+\infty$
f'(x)	+	
f(x)	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) a)

$$f(x)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)=\frac{1+\ln x}{x}$$

or $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{x}=0$

(limite calculée partie A question 1) a))
donc la droite (D) est asymptote à la courbe (C)
b) soit x l'abscisse du point recherché on :

$$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{1+\ln x}{x}=0\Leftrightarrow 1+\ln x=0\Leftrightarrow$$

$$\ln x=-1\Leftrightarrow e^{\ln x}=e^{-1}\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$$

1/e est l'abscisse du point recherché , il suffit de reporter cette valeur dans l'équation de (D) pour avoir l'ordonnée de ce point :

$$y=\frac{1}{2}\times\frac{1}{e}-\frac{3}{2}=\frac{1}{2e}-\frac{3}{2}=\frac{1-3e}{2e}$$

C'est donc le point de coordonnées :

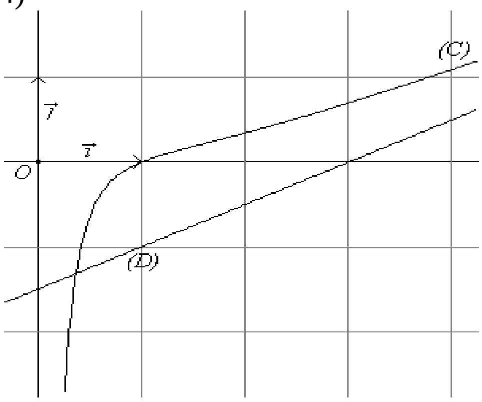
$$\left(\frac{1}{e};\frac{1-3e}{2e}\right)$$

$$f(x)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)=\frac{1+\ln x}{x}$$

$$1+\ln x>0\Leftrightarrow\ln x>-1\Leftrightarrow x>e^{-1}$$

sur l'intervalle $]0\,;e^{-1}[$, 1+ lnx < 0 donc la courbe (C) est strictement en dessous de la droite (D)
sur l'intervalle $]e^{-1}\,;+\infty[$ la courbe (C) est strictement au dessus de la droite (D)

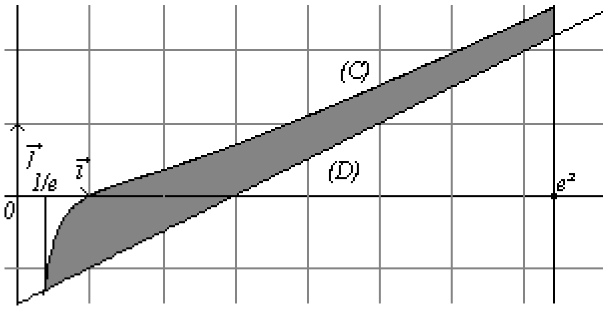
4)



Partie C :

1) h est dérivable sur I , soit H une primitive de h sur I
posons u(x) = ln x on a u'(x) = 1/x et par conséquent h est de la forme u'u on en déduit : H = u²/2

$$H(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$$



$$\int_{1/e}^{e^2} f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) dx = \int_{1/e}^{e} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\, dx =$$

$$\left[\ln x + \frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{1/e}^{e^2} = \ln e^2 + \frac{(\ln e^2)^2}{2} - \ln\frac{1}{e} - \frac{(\ln \frac{1}{e})^2}{2}$$

$$= 2 + 2 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

L'unité d'aire est de 4 cm²
L'aire de la partie hachurée est donc 4 x 9/2 = 18 cm²

Exercice 21

Partie A
Soit g la fonction définie sur]0 ; + ∞[par : *g(x) = -x + x ln x.*
(où ln désigne le logarithme népérien).
1. Résoudre dans l'intervalle] 0 ; + ∞[l'équation *g(x) = 0.*
2. Résoudre dans l'intervalle] 0 ; + ∞[l'inéquation *g(x) > 0.*
Partie B
Soit la fonction f définie sur]0 ; + ∞[par :

$$f(x) = \frac{-3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$$

On appelle (Γ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 2 cm).
1. Déterminer

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) \text{ et } \lim_{x \to 0} f(x)$$

2. Montrer que f '(x) = g(x) . Utiliser les résultats de la partie A pour établir le tableau de variations de f.

3. Calculer $f(e^{\frac{3}{2}})$. On fera apparaître le détail des calculs.
4. Soit A le point d'abscisse 1 de (Γ).
Déterminer une équation de la tangente en A à la courbe (Γ).
5. Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la tangente T ainsi que la partie de la courbe (Γ) , relative à l'intervalle [0 ; 6] .

6. Soit la fonction F définie sur]0 ; + ∞[par :

$$F(x) = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{11}{36}x^3$$

a. Montrer que F est une primitive de f sur]0 ; + ∞[.

b. Calculer en cm² l'aire du domaine limité dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 1 et x = e . On en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

Correction

Partie A

1. *g(x)=0*

-x + x ln x = 0

x(-1 + ln x) = 0

-1 + ln x = 0

(x ne peut pas être égal à 0 puisque la fonction g est définie sur]0 ; + ∞[ )

ln x = 1

ln x = ln e

x = e

S ={e }

2. *g(x) > 0*

x(-1 + ln x) > 0

x est toujours strictement positif puisque la fonction est définie sur *]0 ; + ∞[.*

-1 + ln x > 0 si et seulement si *ln x > 1*

si et seulement si *ln x > ln e*

si et seulement *si x > e*

Signe de x(-1 + ln x) :

x	0		e		+∞
x	0	+		+	
-1+ ln x		-	0	+	
x(-1+ ln x)		-	0	+	

S =]e ; + ∞[

Partie B

1. en + ∞

$$f(x) = \frac{-3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x = x^2\left[\frac{-3}{4} + \frac{1}{2}\ln x\right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3}{4} + \dfrac{1}{2}\ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\} \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

en 0

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0\\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}x = 0\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}x^2\ln x = 0\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{-3}{4}x^2 = 0\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$$

2. *f* est dérivable sur *]0 ; + ∞[* et pour tout réel x de *]0 ; + ∞[* on a :

$$f(x) = \frac{-3}{4}x^2 + \underbrace{\frac{1}{2}x^2\ln x}_{uv}$$

$$f'(x) = \frac{-3}{4}(2x) + \underbrace{\frac{1}{2}(2x)\ln x + \frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{x}}_{u'v+uv'}$$

$$= \frac{-3}{2}x + x\ln x + \frac{1}{2}x = -x + x\ln x = g(x)$$

en utilisant les résultats de la partie A on en déduit les variations de *f*

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^2/4$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(e) = \frac{-3}{4}e^2 + \frac{1}{2}e^2\ln e = \frac{-3}{4}e^2 + \frac{1}{2}e^2 = \frac{-1}{4}e^2$$

3.

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{-3}{4}\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(e^{\frac{3}{2}}\right)^2\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{-3}{4}e^3 + \frac{1}{2}e^3\times\frac{3}{2} = \frac{-3}{4}e^3 + \frac{3}{4}e^3 = 0$$

4.

$$f(1) = \frac{-3}{4} + \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{-3}{4}$$

donc le point A d'abscisse 1 a pour ordonnée -3/4.

$$f'(1) = g(1) = -1 + 1\ln 1 = -1$$

Le coeficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 est *f '(1) = -1*, on en une l'équation de la tangente au point d'abscisse A :

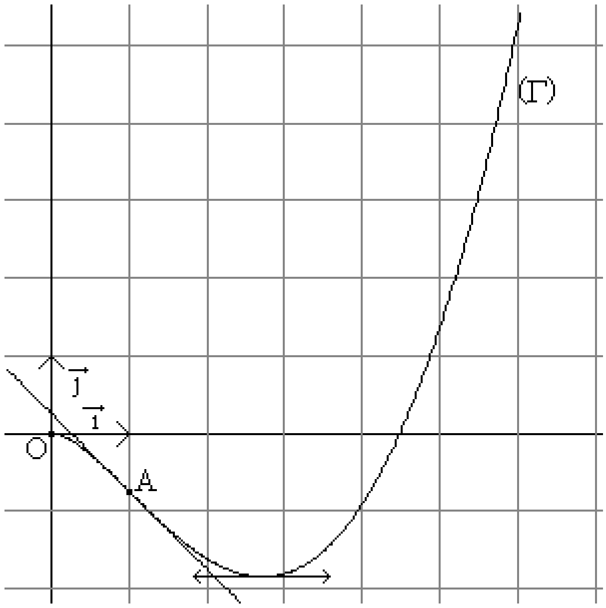
$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$y = -1(x-1) - \frac{3}{4}$$

$$y = -x + 1 - \frac{3}{4}$$

$$\boxed{y = -x + \frac{1}{4}}$$

5. Construction de la courbe (Γ) et de la tangente en A sur [0 ; 6]



6.a. F est une primitive de *f* sur]0 ; + ∞[si F est dérivable et *F'(x) = f(x)*
F est dérivable et

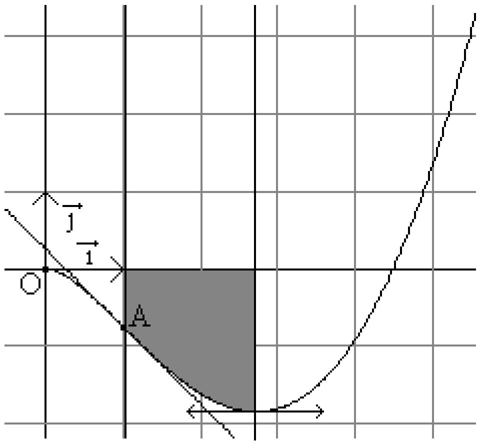
$$F(x) = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{11}{36}x^3$$

$$F'(x) = \frac{1}{6}3x^2 \ln x + \frac{1}{6}x^3 \times \frac{1}{x} - \frac{11}{36}3x^2$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{11}{12}x^2 = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{2}{12}x^2 - \frac{11}{12}x^2$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{9}{12}x^2 = \frac{-3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$$

On retrouve bien *F'(x) = f(x)* donc *F* est bien une primitive de *f* sur]0 ; + ∞[
b.



L'unité d'aire est de 4 cm²
sur l'intervalle [1 ; e], la courbe (Γ) est en dessous de l'axe des abscisses
en unités d'aire l'aire du domaine est :

$$\int_1^e -f(x)dx = -\left[\frac{1}{6}x^3\ln x - \frac{11}{36}x^3\right]_1^e$$
$$= -\left[\left(\frac{1}{6}e^3\ln e - \frac{11}{36}e^3\right) - \left(\frac{1}{6}\ln 1 - \frac{11}{36}\right)\right]$$
$$= -\left[\left(\frac{1}{6}e^3 - \frac{11}{36}e^3\right) - \left(-\frac{11}{36}\right)\right]$$
$$= -\left[\frac{6}{36}e^3 - \frac{11}{36}e^3 + \frac{11}{36}\right]$$
$$= -\left[-\frac{5}{36}e^3 + \frac{11}{36}\right] = \left(\frac{5}{36}e^3 - \frac{11}{36}\right)ua$$

en cm^2 :

$$\left(\frac{5}{36}e^3 - \frac{11}{36}\right)\times 4 = \frac{5e^3 - 11}{9}cm^2 \approx 9{,}94\ cm^2$$

Exercice 22

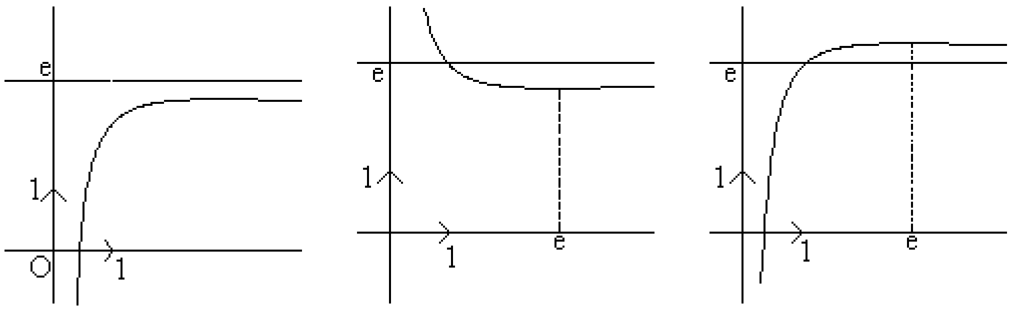
Partie A -

Soit g la fonction définie sur]0 ; + ∞[par :

$$g(x) = \frac{\ln x}{x} + e$$

On note C_g la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

1. Déterminer la limite de g en 0 et en + ∞. Que peut-on en déduire pour C_g ?
2. Déterminer , à l'aide de la dérivée g', le sens de variation de g. Dresser le tableau de variation de g.
3.



courbe 1 courbe 2 courbe 3

L'une des courbes précédentes est la courbe C_g. Indiquer le numéro correspondant à C_g , en précisant la raison de votre choix .

4. Calculer g(1/e) . En déduire, pour tout x appartenant à]0 ; + ∞[, le signe de g(x).

Partie B -

Soit la fonction f définie sur]0 ; + ∞[par :

$$f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + ex - e$$

On note C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal

(unités graphiques : 4 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée).
1. Soit x appartenant à]0 ; + ∞[. Vérifier que f '(x) = g(x).
2. Déterminer les limites de f en 0 et en + ∞
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer l'équation de la tangente (T) à C_f en son point I d'abscisse 1. Préciser la position de C_f par rapport à (T).
5. Tracer (T) et C_f

Partie C -

1. Soit H la fonction définie sur]0 ; + ∞[par :
$H(x) = x (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$
Soit h la fonction définie sur]0 ; + ∞[par : $h(x) = (\ln x)^2$.
Vérifier que H est une primitive de h sur]0 ; + ∞[.
2. Soit (D) la partie du plan limitée par les droites d'équations x = 1 et x = e, la tangente (T) et la courbe C_f . Calculer l'aire A, exprimée en cm² de (D) . On donnera la valeur exacte, puis l'approximation décimale par défaut à 10^{-2} près.

Correction

Partie A

1.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x} + e\right) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$$

par conséquent la droite d'équation x = 0 est asymptote à la courbe C_g (asymptote verticale)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x} + e\right) = \lim_{x\to +\infty} g(x) = e$$

on peut donc en déduire que la droite d'équation y = e est asymptote à la courbe C_g (asymptote horizontale)

2.

La fonction g est dérivable sur]0 ; + ∞[et :

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1\cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

g'(x) est du signe de 1 - lnx puisque x² est strictement positif sur]0 ; + ∞[, étudions donc le signe de 1 - ln x
$1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln x \Leftrightarrow e > x$

$$g(e) = \frac{\ln e}{e} + e = \frac{1}{e} + e$$

x	0		e		+∞
g'(x)		+	0	-	
g(x)	-∞	↗	$\frac{1}{e} + e$	↘	e

3.

- La courbe n°1 est en dessous de la droite d'équation y = e ce qui est en contradiction avec la fonction g, puisque la fonction g est telle que g(e) > e.
- La courbe n°2 est la courbe représentative d'une fonction décroissante, puis croissante, ce qui est en contradiction avec la fonction g qui est croissante sur [0 ; e] et décroissante sur
[e ; + ∞[.
- La courbe n°3 est la courbe qui correspond à la fonction g, g admet bien un maximum en e et ce maximum est bien strictement supérieur à e.

4.

$$g(x) = \frac{\ln x}{x} + e$$

$$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\ln \frac{1}{e}}{\frac{1}{e}} + e = -e \ln e + e = -e + e = 0$$

x	0		$1/e$		e		$+\infty$
$g'(x)$		$+$			0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$\frac{1}{e}+e$	↘	e

On en déduit le signe de g(x) sur]0 ; + ∞[

x	0		$1/e$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1. f est dérivable sur]0 ; + ∞[et :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\left(\frac{1}{x}\right)(\ln x)^1 + e = \frac{\ln x}{x} + e = g(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{2}(\ln x)^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (ex - e) = -e \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

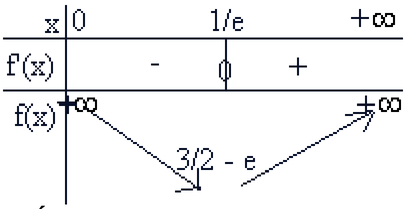
2.

On peut en conclure que la courbe C_f admet un asymptote horizontale d'équation x = 0.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}(\ln x)^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (ex - e) = +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

3. f'(x) = g(x) on en déduit les variations de f

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln \frac{1}{e}\right)^2 + e \cdot \frac{1}{e} - e = \frac{1}{2}(-\ln e)^2 + 1 - e = \frac{3}{2} - e$$



4. Équation de la tangente au point d'abscisse 1.
Calcul du coefficient directeur de cette tangente

$$f'(1) = g(1) = \frac{\ln 1}{1} + e = e$$

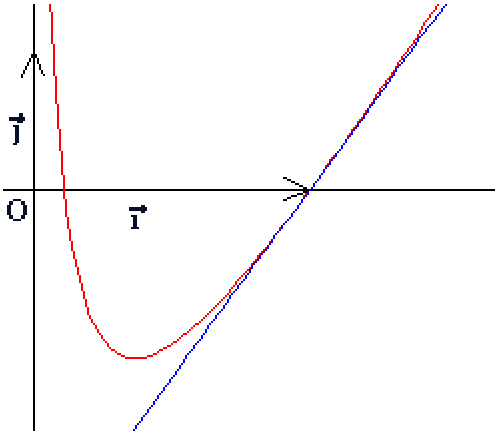
e est le coefficient directeur de cette tangente.

$$f(1) = \frac{1}{2}(\ln 1)^2 + e - e = 0$$

y - f(1)= f'(1) (x - 1)
y - 0 = e(x - 1)
Équation de la tangente
(T) : y =ex - e
Pour étudier la position de la courbe C_f par rapport à la tangente (T) d'équation y = ex - e il suffit d'étudier le signe de f(x) - (ex - e)

$$f(x) - (ex - e) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 \geq 0$$

On en déduit que C_f est au dessus de sa tangente (T) au point d'abscisse 1.
5.



Partie C.

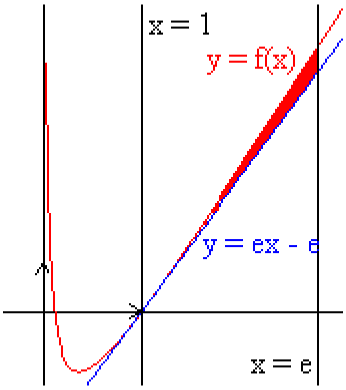
1. La fonction H est dérivable sur]0 ; + ∞[:

$$H'(x) = 1 \cdot (\ln x)^2 + x \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \cdot \ln x - 2\ln x - 2x \cdot \frac{1}{x} + 2$$

$$= (\ln x)^2 + 2\ln x - 2\ln x - 2 + 2$$

$$= (\ln x)^2 = h(x)$$

donc H est bien une primitive de h sur]0 ; + ∞[
2.



$A = \int_1^e \left[f(x) - (ex - e) \right] dx \ u.a.$

$\int_1^e \left[f(x) - (ex - e) \right] dx$

$= \int_1^e \frac{1}{2} (\ln x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_1^e h(x)\, dx$

$= \frac{1}{2} \left[H(x) \right]_1^e$

$= \frac{1}{2} \left[e(\ln e)^2 - 2e \ln e + 2e - 1(\ln 1)^2 + 2 \ln 1 - 2 \right]$

$= \frac{1}{2} \left[e - 2e + 2e - 2 \right] = \frac{e-2}{2}$

$A = \frac{e-2}{2} u.a. =$

$\frac{e-2}{2} \times 4 \times 2 \text{cm}^2 = 4(e-2)\text{cm}^2 \approx 2.87 \text{cm}^2$

Exercice 23

On considère la fonction f définie sur]0 ; + ∞[par :

$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$

et on note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(unité graphique : 5 cm)

Partie A : Etude de la fonction f.

1. Etudier les limites de f en 0 et en + ∞

(pour cette dernière on pourra remarquer que :

$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$)

2. a. Montrer que :

$f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$

pour tout x appartenant à]0 ; + ∞[

b. En déduire le sens de variation de f .

c. Dresser le tableau de variation de f.

Partie B : Etude de quelques points particuliers de C

1. Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection M_1 de C avec l'axe des abscisses.

2. Soit $x_2 = 1/\sqrt{e}$. On note M_2 le point de C d'abscisse x_2.

a. Déterminer une équation de la tangente Δ_2 au point M_2.

b. vérifier que Δ_2 passe par O.

3. Indiquer l'abscisse x_3 du point M_3 de C tel que la tangente Δ_3 à C en M_3 soit parallèle à l'axe des abscisses.

4. Soit f'' la fonction dérivée de f' : calculer f''(x) pour
x appartenant à]0 ; + ∞[.
Déterminer le réel x_4 qui annule f''(x) .
On appelle M_4 le point de C d'abscisse x_4.

5. Vérifier que x_1, x_2, x_3 , x_4 sont quatre termes consécutifs d'une suite géométrique dont on indiquera la raison.

6. Placer les points M_1, M_2, M_3 , M_4 dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
Construire les tangentes Δ_2 et Δ_3 puis la courbe C.

Partie C : Calcul d'une aire

1. On note g la fonction définie sur]0 ; + ∞[par :

$$g(x) = (\ln x)^2$$

Calculer la dérivée de g. En déduire une primitive de f sur]0 ; + ∞[,après avoir remarqué que :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

2. Hachurer le domaine plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = 1/e et x = 2.
Calculer la valeur exacte A de l'aire de ce domaine exprimée en cm².

Correction

A 1.

$$f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} 1+\ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

on peut en déduire en passant que la droite d'équation x = 0 est asymptote à C.

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

On peut en déduire que la droite d'équation y = 0 est asymptote en + ∞

2. a.

f est dérivable sur]0 ; + ∞[et pour tout réel x de]0 ; + ∞[on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - 1(\ln x + 1)}{x^2} = \frac{1 - \ln x - 1}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

2.b.

f '(x) est du signe de - ln x car $x^2 > 0$ sur]0 ; + ∞[

- lnx > 0 si et seulement si lnx < 0 si et seulement si 0 < x < 1

on en déduit que sur l'intervalle]0 ; 1] , f'(x) ≥0 donc f croissante

sur l'intervalle [1 ; + ∞[, f'(x) ≤0 donc f décroissante .

2. c .

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$$f(1) = \frac{1 + \ln 1}{1} = 1$$

Partie B :

1. Le point M_1 a pour ordonnées 0 donc son abscisse est solution de l'équation f(x) = 0 :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -\ln e \Leftrightarrow \ln x = \ln \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

$$x_1 = \frac{1}{e} \quad M_1\left(\frac{1}{e} ; 0\right)$$

2. a.

coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x_2 :

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{-\ln \frac{1}{\sqrt{e}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2} = \frac{\ln \sqrt{e}}{\frac{1}{e}} = \frac{\frac{1}{2}\ln e}{\frac{1}{e}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{e}} = \frac{1}{2} \times \frac{e}{1} = \frac{e}{2}$$

ordonnée du point au point d'abscisse x_2 :

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1 + \ln \frac{1}{\sqrt{e}}}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{e}}{1} = \frac{\sqrt{e}}{2}$$

équation de la tangente Δ_2 au point M_2 :

$$y = f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$
$$y = \frac{e}{2}\left(x - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) + \frac{\sqrt{e}}{2}$$
$$y = \frac{e}{2}x - \frac{e}{2\sqrt{e}} + \frac{\sqrt{e}}{2}$$
$$y = \frac{e}{2}x - \frac{\sqrt{e}}{2} + \frac{\sqrt{e}}{2}$$
$$y = \frac{e}{2}x$$

b. c'est bien l'équation d'une droite passant par l'origine du repère.

3. la tangente au point M_3 d'abscisse x_3 est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est nul donc $f'(x_3) = 0$ on en déduit $x_3 = 1$ et M_3 (1 ; 1)

4.

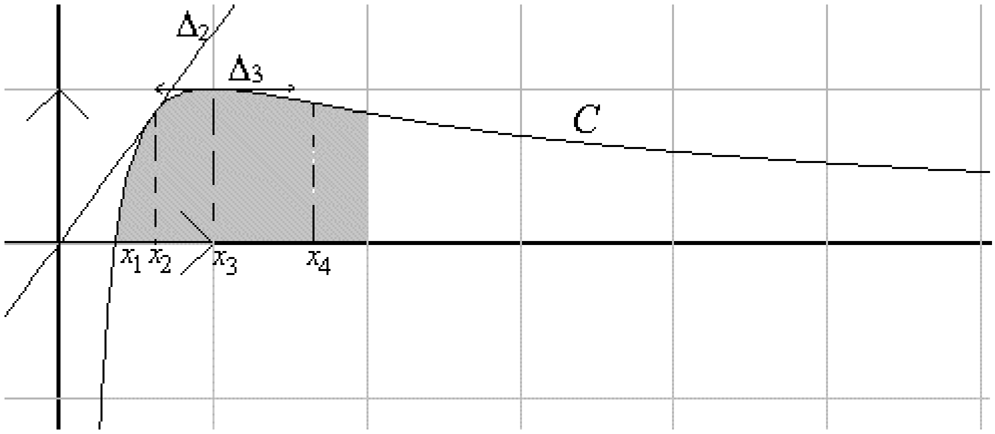
$$f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$$
$$f''(x) = -\frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ln x}{x^4} = -\frac{x - 2x\ln x}{x^4} = -\frac{1 - 2\ln x}{x^3} = \frac{2\ln x - 1}{x^3}$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x - 1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 2\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2}\ln e \Leftrightarrow \ln x = \ln\sqrt{e} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$$
$$x_4 = \sqrt{e}$$

5.

$$x_1 = \frac{1}{e}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = \sqrt{e}$$
$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{e}}}{\frac{1}{e}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \times e = \sqrt{e} \qquad \frac{x_3}{x_2} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \sqrt{e} \qquad \frac{x_4}{x_3} = \sqrt{e}$$
$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = \sqrt{e}$$

donc x_1, x_2, x_3 , x_4 sont les quatre termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\sqrt{e}$

6.



Partie C :

1. g est dérivable sur]0 ; + ∞[et pour tout réel x de]0 ; + ∞[on a :

$$g(x) = (\ln x)^2$$

$$g'(x) = 2 \times \frac{1}{x}(\ln x)^1 = 2\,\frac{\ln x}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$F(x) = \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

2.

$$A = \int_{\frac{1}{e}}^{2} f(x)\,dx = \left[\ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{2} =$$

$$\left[\ln 2 + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \left(\ln\frac{1}{e} + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2\right)\right] =$$

$$\ln 2 + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \left(-1 + \frac{1}{2}\right) =$$

$$\ln 2 + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \frac{1}{2} \simeq 1{,}43\ u.a \simeq 35{,}8\ cm^2$$

Exercice 24

Partie A -

Soit la fonction f définie sur l'intervalle I=]0 ; + ∞[par :
f(x) = ln(2x) - ln(x+1)
1. Vérifier que pour tout réel x de I on a :

$$f(x) = \ln(2) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

2. a. étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I
b. calculer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition I.
c. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3. On note (C) la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; l'unité de longueur est 2 cm.
a. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe (C) avec l'axe (O ; $\vec{i}$).
b. déterminer une équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
c. tracer la courbe (C) et la tangente (T)
4. Déterminer le nombre α tel que la tangente (Δ) à la courbe (C) au point d'abscisse α soit parallèle à la droite d'équation y = x.

Partie B -
Soit la fonction g définie sur I=]0 ; + ∞[par :
g(x) = x ln(2x) - (x + 1) ln(x + 1)
1. Démontrer que la fonction g est une primitive de la fonction f sur I.
2.a.
étudier le signe de f(x) d'après les résultats de la **partie A.**
b. En déduire les variations de g sur l'intervalle I
3. Calculer en cm² la valeur exacte de l'aire de l'ensemble des points M(x; y) du plan tels que $1 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq f(x)$
Préciser une valeur décimale approchée à 0,01cm² près.

Correction-

1. pour tout réel x de I on a :

$$f(x) = \ln(2x) - \ln(x+1)$$
$$= \ln(2) + \ln(x) - \ln(x+1)$$
$$= \ln(2) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

donc pour tout réel x de I on a :

$$f(x) = \ln(2) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

2.a. la fonction f est dérivable sur I comme somme de 2 fonctions dérivables

$$f'(x) = \frac{2}{2x} - \frac{1}{x+1} =$$

sur I et $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$

f'(x) > 0 sur I donc f est strictement croissante sur I.
b.

$$f(x) = \ln(2x) - \ln(x+1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(2x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x+1) = \ln 1 = 0\end{array}\right\} \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

on en déduit que la courbe représentative (C) de la fonction f admet la droite x = 0 comme asymptote (asymptote verticale)

$$f(x) = \ln(2) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1$$

or ln(1) = 0 donc

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$$

On en déduit donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ln 2$

La droite d'équation y = ln 2 est asymptote à la courbe représentative (C) de f (asymptote horizontale)

c.

x	0		$+\infty$
f'(x)	‖	+	
f(x)	‖	$-\infty$ ↗	$\ln 2$

3.a. Le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses a une ordonnée nulle donc son abscisse x vérifie l'équation f(x) = 0

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln(2x) - \ln(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\ln(2x) = \ln(x+1) \Leftrightarrow$$

$$2x = x + 1 \Leftrightarrow$$

$$x = 1$$

C'est donc le point d'abscisse 1.

b. Calculons le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1 :

$$f'(1) = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$$

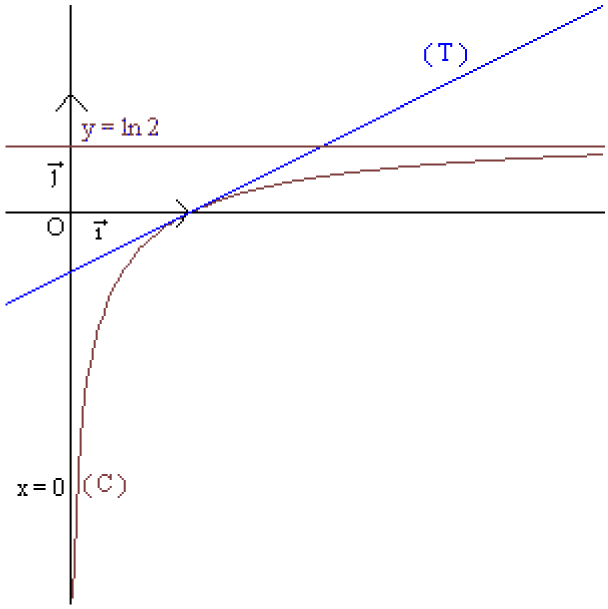
On sait de plus que f(1) = 0 d'après la question 3.a

L'équation de la tangente au point d'abscisse a de la courbe est : y - f(a) = f'(a) (x - a)

Donc l'équation de (T) est y - 0 = 0,5(x - 1)

$$(T) : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

c.



4. Pour (Δ) soit parallèle à la droite d'équation y = x il faut que ces deux droites aient le même coefficient directeur c'est à dire 1.
Par conséquent α doit vérifier l'équation f'(x)=1

$$\frac{1}{x(x+1)} = 1$$

$$x(x+1) = 1$$

$$x^2 + x = 1$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$ donc 2 solutions pour

l'équation $x^2 + x - 1 = 0$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0 \text{ convient}$$

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ ne convient pas}$$

$$\text{donc } \alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Partie B.

1. La fonction g est dérivable sur I, calculons sa dérivée :

$$g(x) = x\ln(2x) - (x+1)\ln(x+1)$$

$$g'(x) = 1 \cdot \ln(2x) + x \cdot \frac{2}{2x} - 1 \cdot \ln(x+1) - (x+1) \cdot \frac{1}{x+1}$$

$$= \ln(2x) + 1 - \ln(x+1) - 1$$

$$= \ln(2x) - \ln(x+1)$$

$$= f(x)$$

g'(x) = f(x) donc g est bien une primitive de f sur I.

2.a on sait que f(1) = 0 on en déduit donc le signe de f(x) :

x	0		1		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	↗	0	↗	ln 2
f(x)		-	0	+	

2.b

x	0		1		$+\infty$
f(x)		-	0	+	
g(x)		↗	-ln2	↘	

$$g(1) = \ln 2 - 2\ln 2 = -\ln 2$$

3.La courbe représentative de f est au dessus de l'axe des abscisse sur l'intervalle [1; 2] donc l'aire de l'ensemble des points M(x; y) du plan tels que $1 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq f(x)$ est égale à :

$$\left(\int_1^2 f(x)dx\right) u.a$$

(u.a unités d'aire)

Calculons l'intégrale :

$$\int_1^2 f(x)dx = [g(x)]_1^2 = g(2) - g(1)$$

$$\int_1^2 f(x)dx = 2\ln 4 - 3\ln 3 + \ln 2$$

$$= 2\ln 2^2 - 3\ln 3 + \ln 2$$

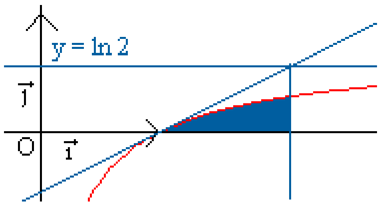
$$= 4\ln 2 - 3\ln 3 + \ln 2$$

$$= 5\ln 2 - 3\ln 3 = \ln 2^5 - \ln 3^3 = \ln\frac{32}{27}$$

L'unité d'aire étant de 4 cm² ,

L'aire du domaine demandé est donc de :

$$\ln\frac{32}{27}\,\text{u.a.} = 4\ln\frac{32}{27}\,cm^2 \approx 0.680\ cm^2$$



Exercice 25

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle]0 ; + ∞[.

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle I par :

$g(x) = x^2 + 6 - 4\ln x$

On admet que le tableau de variation de g est le suivant :

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

1. calculer $g(\sqrt{2})$.
2. En déduire que g est une fonction positive sur l'intervalle I.

Partie B

Soit la fonction définie sur l'intervalle I par :

$$f(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$$

On f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I et C la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 4 cm.

1. a. étudier la limite de f en $+\infty$

b. étudier la limite de f en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe C.

c. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle I,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{4x^2}$$

d. Déduire de la **partie A**, le signe de f'(x) puis le sens de variation de f sur l'intervalle I.

e. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle I.

2. Soit (D) la droite d'équation y = x/4 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a. Montrer que la droite (D) est asymptote à la courbe (C)

b. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection de la courbe (C) et de la droite (D)

c. Déterminer la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D).

3. En utilisant les résultats précédents, tracer avec soin dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite (D) et la courbe (C)

4. On considère la fonction h définie sur l'intervalle I par :

$$h(x) = \frac{-1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$$

a. En remarquant que $\frac{\ln x}{x}$ est de la forme u'(x).u(x), déterminer une primitive de la fonction h.

b. Calculer en cm² l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équation x = $\sqrt{e}$ et x = e.

Correction

Partie A

1 et 2.

$$g(\sqrt{2}) = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 6 - 4\ln\sqrt{2}$$

$$= 2 + 6 - 2\ln 2 = 8 - 2\ln 2 > 0$$

g atteint son minimum en $\sqrt{2}$ sur I et g($\sqrt{2}$)> 0 donc g(x) > 0 pour tout réel x appartenant à I.

Partie B

1.a

$$f(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{4} = +\infty \\ &\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2x} = 0 \\ &\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{aligned}\right\} \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

1.b

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} \frac{x}{4} = 0 \\ &\lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{2x} = -\infty \\ &\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \\ &\lim_{x \to 0^+} x = 0^+ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

Donc la courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation x = 0.

c.

$$f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2x^2} + \frac{\frac{1}{x}\cdot x - x\ln x}{x^2} =$$

$$\frac{x^2}{4x^2} + \frac{2}{4x^2} + \frac{4(1 - x\ln x)}{4x^2} =$$

$$\frac{x^2 + 6 - 4x\ln x}{4x^2} = \frac{g(x)}{4x^2}$$

d. $4x^2 > 0$ sur I donc f'(x) est du signe de g(x) or g(x) > 0 sur I d'ou f est strictement croissante sur I.

e.

x	0		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

2.a.

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \frac{x}{4} \right] = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x} \right]}_{\text{d'après 1.a}} = 0$$

donc la droite d'équation y = x/4 est asymptote à la courbe (C) (c'est une asymptote oblique).

b. Soit M(x ; y) le point d'intersection de (D) et (C) alors le couple (x ; y) est solution du système :

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{4} \\ f(x) = \dfrac{x}{4} \end{cases}$$

Résolvons sur I l'équation f(x) = x/4

$$-\frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\frac{-1 + 2\ln x}{2x} = 0$$

$$2 \ln x = 1$$

$$\ln x = \frac{1}{2}$$

$$x = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

d'ou

$$y = \frac{\sqrt{e}}{4}$$

Les coordonnées du point d'intersection de (D) et (C) sont

($\sqrt{e}$; $\sqrt{e}$/4)

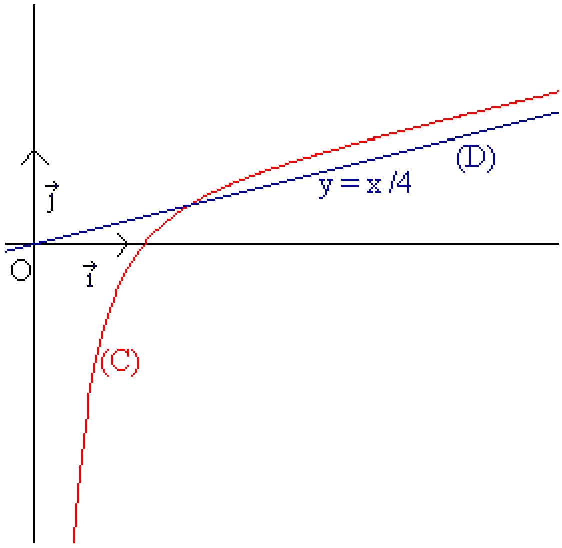
c. Pour étudier la position de (C) par rapport à (D) il faut étudier le signe de f(x) - x/4, le signe de f(x) - x/4 dépend de -1 + 2 ln x

-1 + 2ln x > 0 $\Leftrightarrow$ 2 ln x > 1 $\Leftrightarrow$ ln x > 1/2 $\Leftrightarrow$ x > $\sqrt{e}$

Autrement dit la courbe (C) est au dessous de la droite (D) sur l'intervalle]0 ; $\sqrt{e}$]

et (C) est au dessus de la droite (D) sur l'intervalle [$\sqrt{e}$; + ∞[

3.



4.a. Soit H une primitive de h sur I :

$$h(x) = \frac{-1}{2x} + \frac{\ln x}{x} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \ln x$$

$$H(x) = \frac{-1}{2} \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2}$$

b. Soit A l'aire du domaine, (C) étant au dessus de (D)
on a :

$$A = \int_{\sqrt{e}}^{e} \left(f(x) - \frac{x}{4} \right) dx \text{ u.a.} = \int_{\sqrt{e}}^{e} h(x)dx \text{ u.a.}$$

$$\int_{\sqrt{e}}^{e} h(x)dx =$$

$$[H(x)]_{\sqrt{e}}^{e} =$$

$$H(e) - H(\sqrt{e}) =$$

$$\frac{-1}{2} \ln e + \frac{(\ln e)^2}{2} + \frac{1}{2} \ln \sqrt{e} - \frac{\left(\ln(\sqrt{e})\right)^2}{2} =$$

$$\frac{-1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$A = \frac{1}{8} u.a. = \frac{1}{2} cm^2$$

Exercice 26

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle]0 ; + ∞[

Partie A

Soit *g* la fonction définie sur]0 ; + ∞[par :

g(x) = x ln x - 2x + 3

1.a. Déterminer la limite de g en 0.

(on admettra que $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$)

b. Déterminer la limite de g en + ∞

(on pourra mettre x en facteur).
2. Déterminer à l'aide de la dérivée g', le sens de variation de la fonction g.
Dresser le tableau de variations de g.
3. Calculer g(e). En déduire que pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$, $g(x) > 0$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$f(x) = 2x^2 \ln x - 5x^2 + 12x$
On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal ayant pour unités graphiques :

- 2 cm en abscisse,
- 1 cm en ordonnée.

1. Soit x appartenant à $]0\,;+\infty[$. Montrer que $f'(x) = 4g(x)$.
2. a. Déterminer la limite de f en 0.
b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
4. a. Déterminer une équation de la tangente T_1 à C en son point I d'abscisse 1.
b. Déterminer une équation de la tangente T_2 à C en son point K d'abscisse e.
5. Tracer T_1, T_2 et C .

Partie C

1. Soit la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$H(x) = \frac{1}{3}x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\right)$$

et h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = x^2 \ln x$.
Vérifier que H est une primitive de h sur $]0\,;+\infty[$.
2. Soit D la <u>partie du plan limitée</u> par les droites d'équation x = 1 et x = e, l'axe des abscisses et la courbe C.
Calculer l'aire A, exprimée en unité d'aire, de la partie D. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

Correction

Partie A

1.a.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0\\ \lim\limits_{x\to 0}(-2x+3) = 3\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 3$$

1.b.

$$g(x) = x\ln x - 2x + 3 = x\left[\ln x - 2 + \frac{3}{x}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{3}{x} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln x - 2 + \dfrac{3}{x}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

2. g est dérivable comme somme de fonction dérivable sur]0 ; + ∞[, calculons g'(x) :

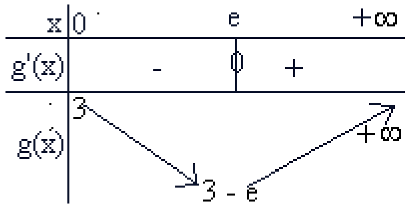
$$g'(x) = 1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 2 = \ln x - 1$$

Étudions le signe de g'(x) :

g'(x) > 0 ⇔ ln x - 1> 0 ⇔ ln x > 1 ⇔ x > e

donc g est décroissante sur [0 ; e] et elle est croissante sur [e ; + ∞ [

On en déduit le tableau de variation de la fonction g :



3. g(e) = e ln e - 2e + 3 = e - 2e + 3 = 3 - e

g admet sur l'intervalle]0 ; + ∞[un minimum absolu en e qui est 3 -e , donc pour tout réel x de l'intervalle]0 ; + ∞[

g(x) > 3 - e > 0.

Partie B.

1.

f est dérivable comme somme de fonctions

dérivables sur]0 ; + ∞[

$$f(x) = 2x^2\ln x - 5x^2 + 12x$$

$$f'(x) = 4x\ln x + 2x^2\cdot\frac{1}{x} - 10x + 12$$

$$= 4x\ln x + 2x - 10x + 12$$

$$= 4x\ln x - 8x + 12$$

$$= 4(x\ln x - 2x + 3) = 4g(x)$$

2. a.

$$f(x) = 2x^2 \ln x - 5x^2 + 12x$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} 2x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(2x^2 \ln x\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0}\left(-5x^2 + 12x\right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$$

b.

$$f(x) = 2x^2 \ln x - 5x^2 + 12x$$

$$f(x) = x^2\left[2\ln x - 5 + \frac{12}{x}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} 2\ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} -5 + \frac{12}{x} = -5 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\left[2\ln x - 5 + \frac{12}{x}\right] = +\infty \end{array}\right\}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^2\left[2\ln x - 5 + \frac{12}{x}\right] = \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

3. f'(x) = 4 g(x) donc f'(x) > 0 sur]0 ; + ∞[d'ou f est strictement croissante sur]0 ; + ∞[.

x	0		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	0	↗	$+\infty$

4. a.

Tangente T_1 à C en son point I d'abscisse 1.

f'(1) = 4(1ln1-2+3) = 4

Le coefficient directeur de T_1 est 4.

f(1)= 2ln1 - 5 + 12 = 7.

y - f(1) = f'(1)(x - 1)

y - 7 = 4(x - 1)

T_1 : y = 4x + 3

b.

f'(e) = 4g(e) = 4(3 - e) =12 - 4e est le coefficient directeur de la tangente en e.

f(e) = 2e²lne - 5e² + 12 e = 2e² - 5e² + 12e = - 3e² + 12 e

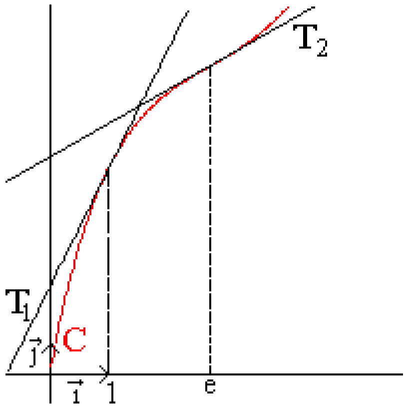
Équation de T_2

y = - 3e² + 12e + (12 - 4e)(x - e)

y = (12 - 4e)x - 3e² + 12e - 12e + 4e²

T_2 : y = (12 - 4e)x + e²

5.



Partie C

1.

La fonction H est dérivable sur]0 ; + ∞[et on a :

$$H(x) = \frac{1}{3}x^3\left(\ln x - \frac{1}{3}\right)$$

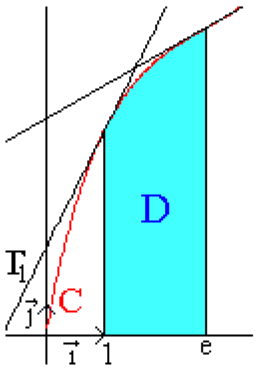
$$H'(x) = x^2\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}x^3\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= x^2 \ln x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^2 = x^2 \ln x = h(x)$$

(forme (uv)' = u'v + uv')

On en déduit que H est une primitive de la fonction h sur]0 ; + ∞[.

2.



Sur l'intervalle [1; e] , la courbe C est au dessus de l'axe des abscisses donc l'aire A de la partie D est égale en unité d'aire à :

$$\int_1^e f(x)dx = \int_1^e (2x^2 \ln x - 5x^2 + 12x)dx$$

$$= \left[2H(x) - \frac{5x^3}{3} + 6x^2 \right]_1^e$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^3 \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) - \frac{5x^3}{3} + 6x^2 \right]_1^e$$

$$= \left[\frac{2}{3}e^3 \left(\ln e - \frac{1}{3} \right) - \frac{5e^3}{3} + 6e^2 - \left(\frac{-2}{9} - \frac{5}{3} + 6 \right) \right]$$

$$= \left[\frac{4e^3}{9} - \frac{5e^3}{3} + 6e^2 - \frac{37}{9} \right]$$

$$= -\frac{11}{9}e^3 + 6e^2 - \frac{37}{9}$$

$$A = 2\left(-\frac{11}{9}e^3 + 6e^2 - \frac{37}{9} \right) cm^2$$

soit environ $A \approx 31{,}35$ cm²

Exercice 27

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0\,;+\infty[$

Partie A

Soit *g* la fonction définie sur l'intervalle I par :

$g(x) = x^2 + 3 - 2 \ln x$

1.a. On note g' la dérivée de la de fonction g ; calculer g'(*x*) et étudier son signe, pour *x* appartenant à l'intervalle I.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$ ne sont pas demandées.

2. Calculer g(1), en déduire le signe de g(x) pour x appartenant à l'intervalle I.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$$

On note f ' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle I et C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm.

1. a. Étudier la limite de f en 0 et en déduire l'existence d'une asymptote à la courbe C.

b. Étudier la limite de f en $+\infty$.

2. a. Montrer que pour tout réel *x* de l'intervalle I,

$$f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$$

b. Déduire de la partie A le signe de f´(x) puis le sens de variation de f sur l'intervalle I.
c. Établir le tableau de variations de la fonction *f* sur l'intervalle I.

3. Soit D la droite d'équation y = ½ x dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
a. Montrer que la droite D est asymptote à la courbe C.
b. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection E de la courbe C et de la droite D.
c. Sur l'intervalle I, déterminer la position de la courbe C par rapport à la droite D.
4. En utilisant les résultats précédents, tracer avec soin dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite D et la courbe C.

Partie C

1. On considère la fonction *h* définie sur l'intervalle I par :

$$h(x) = \frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x}$$

En remarquant que

$$\frac{\ln x}{x}$$

est de la forme u'(x).u(x), déterminer une primitive de la fonction h sur l'intervalle I.
2. Hachurer sur le graphique la partie du plan limitée par la courbe C, la droite et les deux droites d'équations *x* = 1 et x = $e^{1/2}$
Calculer l'aire, exprimée en cm^2, de cette partie hachurée.

Correction

Partie A

1.a. La fonction g est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables sur I et :

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}$$

$$= \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

(x + 1) et x sont strictement positifs sur l'intervalle I donc g'(x) est du signe de x - 1.
1.b. On en déduit le tableau de variation de g :

x	0		1		+∞
g'(x)	‖	-	0	+	
g(x)	‖	↘	4	↗	

2. a. g(1) = 1² + 3 - 2 ln 1 = 4
donc g admet sur un minimum absolu en 1 qui est 4, donc pour tout réel x

de l'intervalle I, g(x) > 0.

Partie B

1.a.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{2}x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-1}{2x} = -\infty \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

Par conséquent la droite d'équation x = 0 est asymptote à C (asymptote verticale)

1.b.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1}{2x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

2.a.

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 + 1 + 2 - 2\ln x}{2x^2}$$

$$= \frac{x^2 + 3 - 2\ln x}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$$

2.b.

f '(x) est du signe de g(x) puisque $2x^2 > 0$ sur I.

Or g(x) > 0 sur I , il en résulte f est strictement croissante sur I.

2.c.

x	0		$+\infty$
f '(x)		+	
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3.a.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right) =$$

$$\underbrace{\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x} \right) = 0}_{\text{d'après partie B 1.b.}}$$

Donc la droite D d'équation y = ½ x est bien asymptote à la courbe C. (<u>asymptote oblique</u>)

3. b.

Soit (x ; y) les coordonnées de E , E est le point d'intersection de D et de C, donc ses coordonnées sont solutions du système :

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

résolvons l'équation

$$f(x) = \frac{x}{2}$$

sur I pour trouver l'abscisse du point E :

$$f(x) = \frac{x}{2}$$

$$-\frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\frac{-1 + 2\ln x}{x} = 0$$

$$-1 + 2\ln x = 0$$

$$\ln x = \frac{1}{2}$$

$$x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

l'abscisse du point E est $\sqrt{e}$, son ordonnée est donc

y = $\sqrt{e}$/ 2

E($\sqrt{e}$; $\sqrt{e}$/ 2)

c. pour étudier la position de la courbe C par rapport à la droite D, il suffit d'étudier le signe de l'expression f(x) - x/2 =

$$\frac{-1 + 2\ln x}{x}$$

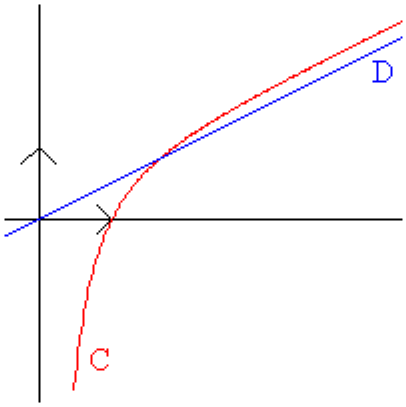
Cette expression est du signe de -1 + 2lnx puisque x > 0 sur I.

-1 + 2lnx > 0 ⇔ 2lnx > 1 ⇔ ln x >1/2 ⇔ x > $\sqrt{e}$

C est au dessous de la droite D sur l'intervalle [0 ; $\sqrt{e}$]

C est au dessus de la droite D sur l'intervalle [$\sqrt{e}$; + ∞ [

4.



Partie C

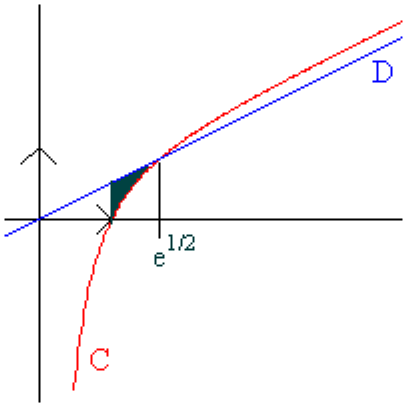
1.

$$h(x) = \frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\ln x$$

$$H(x) = \frac{1}{2}\ln x - \frac{(\ln x)^2}{2}$$

2.



La droite D étant au dessus de la courbe C sur l'intervalle [1; $e^{1/2}$]

$$A = \int_1^{e^{1/2}} \left[\frac{x}{2} - f(x)\right] dx \text{ unités d'aire}$$

$$A = \int_1^{e^{1/2}} \left[\frac{1}{2x} - \frac{\ln x}{x}\right] dx \text{ unités d'aire}$$

$$A = \int_1^{e^{1/2}} h(x) dx \text{ unités d'aire}$$

$$\mathrm{A} = \int_1^{e^{1/2}} h(x) dx \times 4\,\mathrm{cm}^2$$

$$\int_1^{e^{1/2}} h(x)dx = H(e^{1/2}) - H(1)$$

$$\frac{1}{2}\ln e^{1/2} - \frac{(\ln e^{1/2})^2}{2} =$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}u.a.$$

$$\frac{1}{2}cm^2$$

Exercice 28

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (L'unité graphique est 2 cm).

Le but du problème est l'étude de la fonction *f* définie sur l'intervalle]0;+ ∞[par :

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2\ln(x)}{x}$$

puis de calculer une aire.

I) On note g la fonction définie sur l'intervalle]0;+ ∞[par : g(x) = x^2 - 4 + 2 ln(x).

1) Calculer la fonction dérivée *g'* de la fonction g.

2) Déterminer le sens de variation de la fonction g.

(On ne demande pas les limites en 0 et en + ∞.)

3) Résolution de l'équation g(x) = 0.

a) Démontrer que sur l'intervalle [1 ; 2] l'équation g(x) = 0 possède une solution unique α.

b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de ce nombre α.

4) Déduire de ce qui précède le signe de g(x) suivant les valeurs de x,

dans l'intervalle]0;+ ∞[.

II) 1) Déterminer la limite de *f* en 0. Qu'en déduit-on pour la courbe C ?

2) Etude en + ∞.

a) Déterminer la limite de *f* en + ∞.

b) Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ -1 est asymptote à la courbe C ?.

c) Déterminer les coordonnées du point A commun à la courbe C et à la droite D.

d) Etudier la position de la courbe C par rapport à la droite D.

3) Etude des variations de *f.*

a) Déterminer la fonction dérivée *f* ' de la fonction *f*

Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle]0;+ ∞[; *f* '(x) = g(x)/x^2 , où g est la fonction étudiée dans la partie I.

b) En utilisant les résultats de la partie I, dresser le tableau des variations de la fonction *f*

4) On note T la tangente à la courbe C au point d'abscisse e^2.

Montrer que T est parallèle à l'asymptote D.

5) Dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, tracer la droite D, la tangente T et la courbe C à l'aide de l'étude précédente. (On prendra *f*(α) = 1,25 m)

III) On définit sur l'intervalle]0;+ ∞[la fonction H par :

$$H(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln x - (\ln x)^2$$

1) Démontrer que H est une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2) Soit E la région du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

a) Hachurer la région E sur votre figure.

b) On note S l'aire, exprimée en unité d'aire, de la région E

Déterminer la valeur exacte de S.

c) Donner la valeur décimale approchée de cette aire, arrondie au mm^2.

Correction

I) 1)

$$g'(x) = 2x + \frac{2}{x}$$

2) $g'(x) > 0$ comme somme de deux expressions strictement positive sur $]0\,;+\infty[$ donc g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$

3) Résolution de l'équation $g(x) = 0$.

a) $g(1) = 1 - 4 = -3 < 0$ et $g(2) = 2^2 - 4 + 2\ln 2 = 2\ln 2 > 0$

g est strictement croissante sur $[1\,;2]$, g est dérivable sur $[1\,;2]$ et $g(1) < 0 < g(2)$, donc l'équation $g(x) = 0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $[1\,;2]$.

b) $g(1{,}70) < 0 < g(1{,}71)$ donc $1{,}70 < \alpha < 1{,}71$

4) On en déduit que $g(x) < 0$ sur $]0\,;\alpha[$ et $g(x) > 0$ sur $]\alpha\,;+\infty[$ et $g(\alpha) = 0$

II) 1) La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe C

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0+} x - 1 = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0+} \frac{2}{x} = +\infty \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0+} \left(-2\ln x\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0+} x = 0^+ \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0+} \frac{-2\ln x}{x} = +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$$

2) Etude en $+\infty$.

a) Déterminer la limite de *f* en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} x - 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} -2\frac{\ln x}{x} = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

b)

$$f(x) - (x-1) = \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} -2\frac{\ln x}{x} = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to +\infty} \left[f(x) - (x-1)\right] = 0$$

c)

$$f(x) = x-1 \Leftrightarrow \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 = \ln x \Leftrightarrow \ln e = \ln x \Leftrightarrow x = e$$

donc l'abscisse du point d'intersection de C et D est e et son ordonnée est e - 1 (en remplaçant $x = e$ dans l'équation de D , on trouve $y = e - 1$)

d)

$$f(x) - (x-1) = \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x} = \frac{2-2\ln x}{x} = \frac{2(1-\ln x)}{x}$$

$f(x) - (x - 1)$ est du signe de $1 - \ln x$, $1 - \ln x > 0$ si et seulement si $\ln x < 1$ soit $x < e$

Conclusion :

- sur l'intervalle $]0 ; e]$, la courbe C est au dessus de la droite D
- sur l'intervalle $[e ; +\infty[$

3) Etude des variations de f.

a)

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} - \frac{\frac{2}{x}\times x - 2\ln x}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} - \frac{2-2\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2 - 2 + 2\ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 4 + 2\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b) $f'(x)$ est donc du signe de $g(x)$, on en déduit les variations de f :

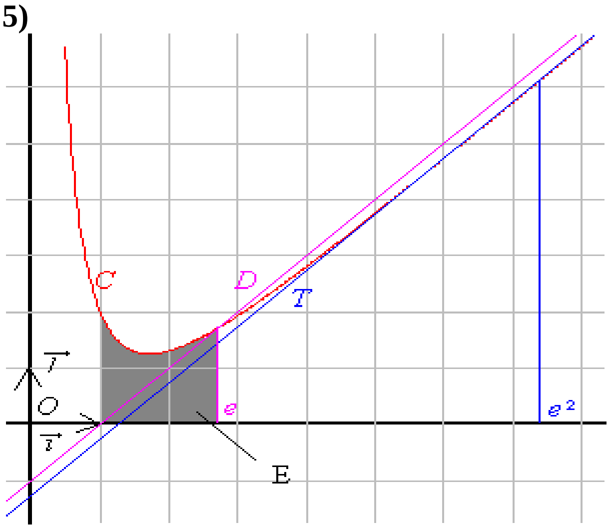
x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4) On note T la tangente à la courbe C au point d'abscisse e^2.

$$f'(e^2) = \frac{e^4 - 4 + 2\ln e^2}{e^4} = \frac{e^4 - 4 + 4}{e^4} = 1$$

le coefficient directeur de la tangente T est le même que le coefficient directeur de la droite D soit 1.

5)



III) 1)

$$H(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2\ln x - \underbrace{(\ln x)^2}_{forme\ u^2}$$

$$H'(x) = x - 1 + \frac{2}{x} - \underbrace{2\frac{1}{x}(\ln x)}_{forme\ 2u'u} = x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x} = f(x)$$

donc H est une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle]0;+ ∞[.

2)

a) voir figure

b)

$$S = \int_1^e f(x)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + 2\ln x - (\ln x)^2\right]_1^e$$

$$= \left[\frac{e^2}{2} - e + 2 - 1 - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = \frac{e^2}{2} - e + 1 + \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2} - e + \frac{3}{2}u.a$$

c) valeur décimale approchée de cette aire, arrondie au mm^2 (2 chiffres après la virgule)
l'unité d'aire est 4 cm² on a S = 9,90 cm²

Exercice 29

On considère la fonction *f* définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$.

Dans le repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm sur chaque axe, on note C_f sa représentation graphique et C_{exp} la représentation graphique de la fonction exponentielle.

l.a. Déterminer la limite de *f* en + ∞.

b. Donner les valeurs de

$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^x \text{ et de } \lim_{x\to-\infty} xe^x$$

c. En déduire que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

Que peut-on en déduire graphiquement ?

2.a. On note *f '* la fonction dérivée de *f* sur $\mathbb{R}$, montrer que $f'(x) = (x + 1)(x + 2)e^x$.

b. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$

c. En déduire le tableau de variations de la fonction *f*

3. Déterminer le signe de *f* sur $\mathbb{R}$.

4.a. Préciser les positions relatives de C_f et de C_{exp}.

b. Construire ces deux courbes dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

5. Soit F la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $F(x) = (x^2 - x + 2)e^x$.
Prouver que F est une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$

6.a. Déterminer la valeur exacte de l'aire en cm² du domaine D délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

b. Déterminer la valeur exacte de l'aire en cm² du domaine D' délimité par les courbes C_f et C_{exp} , et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

Exercice 29 -correction-

Exercice 4 (6 points)

l.a.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+x+1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

b.

$$\lim_{x\to-\infty}x^2e^x=0=\lim_{x\to-\infty}xe^x$$

c.

$$f(x)=(x^2+x+1)e^x=x^2e^x+xe^x+e^x$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$$

La droite d'équation y = 0 est asymptote à la courbe représentative C_f en - ∞

2.a.

$$f(x)=(x^2+x+1)e^x\qquad f=uv\Rightarrow f'=uv'+uv'$$

$$f'(x)=(2x+1)e^x+(x^2+x+1)e^x=(x^2+3x+2)e^x$$

$$(x+1)(x+2)=x^2+x+2x+2=x^2+3x+2$$

$$donc\ \ f'(x)=(x^2+3x+2)e^x=(x+1)(x+2)e^x$$

b. $f'(x)$ est du signe de $(x+1)(x+2)$ car $e^x>0$ sur $\mathbb{R}$

le polynôme $(x+1)(x+2)$ a deux racines réelles distinctes -2 et -1 et son signe est positif à l'extérieur des racines.

c.

$$f(-1)=(1-1+1)e^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}\qquad f(-2)=(4-2+1)e^{-2}=3e^{-2}=\frac{3}{e^2}$$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	$3/e^2$	↘	$1/e$	↗	$+\infty$

3. D'après le tableau de variation $f(x)>0$ sur $\mathbb{R}$

4.a.

$$f(x)-e^x=(x^2+x+1)e^x-e^x=(x^2+x)e^x=x(x+1)e^x$$

$f(x)-e^x$ est donc du signe de $x(x+1)$

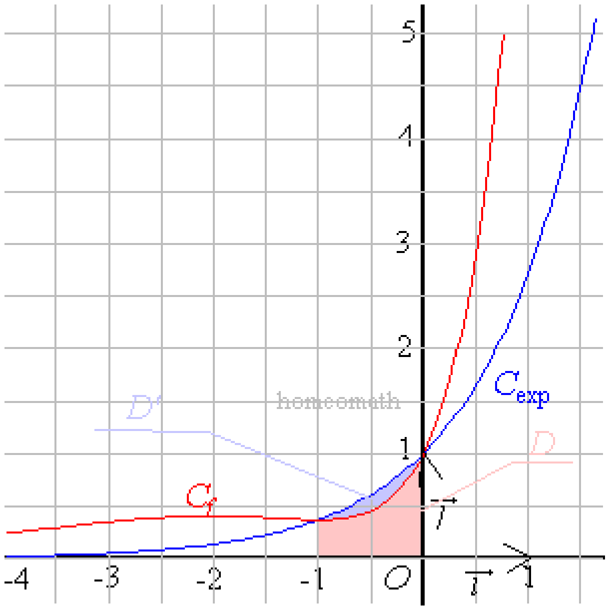
x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)-e^x$		+	0	-	0	+	

sur l'intervalle] - ∞; - 1] la courbe C_f est au dessus de C_{exp}

sur l'intervalle [-1 ; 1] la courbe C_f est en dessous de C_{exp}

sur l'intervalle [1 ; + ∞[la courbe C_f est au dessus de C_{exp}

b.



5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : F'(x) = (2x - 1)e^x + (x^2 - x + 2)e^x = (x^2 - x + 2 +2x - 1) e^x =
(x^2 + x +1) e^x = $f(x)$ donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

6.a. Sur l'intervalle [-1 ; 0] la courbe C_f est au dessus de l'axe des abscisses donc l'aire de D est donné en unité d'aire par :

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \left[F(x)\right]_{-1}^{0} = \left[(x^2 - x + 2)e^x\right]_{-1}^{0}$$

$$= (0 - 0 + 2)e^0 - (1 + 1 + 2)e^{-1} = 2 - 4e^{-1}$$

$1u.a. = 4cm^2$ $\boxed{Aire(D) = \left(2 - 4e^{-1}\right) \times 4 = 8(1 - 2e^{-1})\ cm^2}$

b. Sur l'intervalle [-1 ; 0] la courbe C_f est au dessous de courbe C_{exp} donc l'aire de D' est donné en unité d'aire par :

$$\int_{-1}^{0} e^x - f(x)dx = \left[e^x - F(x)\right]_{-1}^{0} = \left[e^x\right]_{-1}^{0} - \left[F(x)\right]_{-1}^{0}$$

$$= e^0 - e^{-1} - \left(2 - 4e^{-1}\right) = 1 - e^{-1} - 2 + 4e^{-1} = 3e^{-1} - 1$$

$$\boxed{Aire(D') = 4(3e^{-1} - 1)\ cm^2}$$

Exercice 30

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par g(x) = e^x -2x.

1. Calculer g' (x) où g' désigne la dérivée de g puis dresser le tableau de variations de g.

2. En déduire que pour tout réel x de $\mathbb{R}$, g(x) > 0.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f (x) = e^x -x^2.

1. Déterminer la limite de f en - ∞ puis la limite de f en + ∞.

Pour la limite en + ∞, on pourra remarquer que pour x non nul f (x) peut s'écrire :

$$x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - 1\right)$$

2. Calculer f '(x) où f ' désigne la fonction dérivée de la fonction f , puis en utilisant la partie A construire le tableau de variations de *f*

3. On admet que l'équation *f* (x) = 0 admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
a) Calculer *f* (-l) et *f* (0).
b) Montrer que la solution de l'équation *f* (x) = 0 est unique et
qu'elle appartient à l'intervalle [-1 ; 0]
c) En utilisant une calculatrice pour calculer *f* (x) pour différentes valeurs de x, donner une valeur approchée à 10^{-3} près de cette solution. Justifier la valeur retenue.

Correction

Partie A

1. Pour tout réel x on a g' (x) = e^x -2.
g' (x) > 0 équivaut à e^x -2 > 0 équivaut à e^x > 2 équivaut à x > ln 2
donc la fonction g est croissante sur [ln 2 ; + ∞[et décroissante sur] - ∞; ln 2]
g(ln2) = $e^{\ln 2}$ -2 ln2 = 2 - 2 ln2.

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$2-2\ln 2$	$\nearrow$	

2. Le minimum de la fonction g : g(ln2) = 2 - 2ln 2 > 0 donc pour tout réel x on a : g(x) > 0.

Partie B

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par *f* (x) = e^x -x^2.

1.

$$f(x) = e^x - x^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to -\infty} (-x^2) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

Pour tout réel x non nul on a :

$$f(x) = e^x - x^2 = x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - 1\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{e^x}{x^2} - 1\right) = -1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

2. Pour tout réel x on a : *f* '(x) = e^x - 2x = g(x) > 0 d'après la partie A.
on en déduit *f* strictement croissante sur $\mathbb{R}$

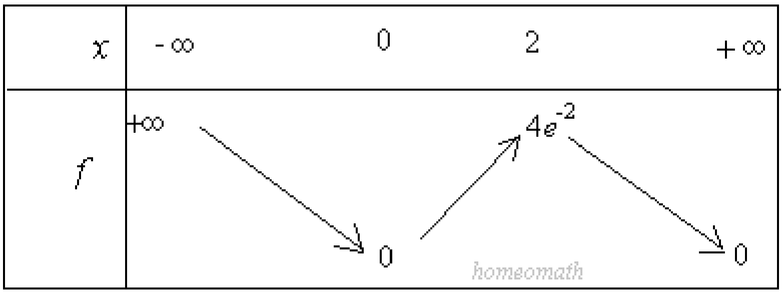
x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. a) $f(-l) = e^{-1} - 1 = 1/e - 1$; $f(0) = e^0 - 0^2 = 1$
b) La fonction f est strictement croissante sur [-1 ; 0] et on a : $f(-1) < 0 < f(0)$ donc la solution de l'équation $f(x) = 0$ est unique et elle appartient à l'intervalle [-1 ; 0]
c) $f(-0{,}704) < 0 < f(-0{,}703)$ donc la solution de cette équation est comprise entre -0,704 et -0,703 on peut donc prendre -0,704 comme valeur approchée à 10^{-3} près de cette solution.

Exercice 31

Partie A

On donne le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$:



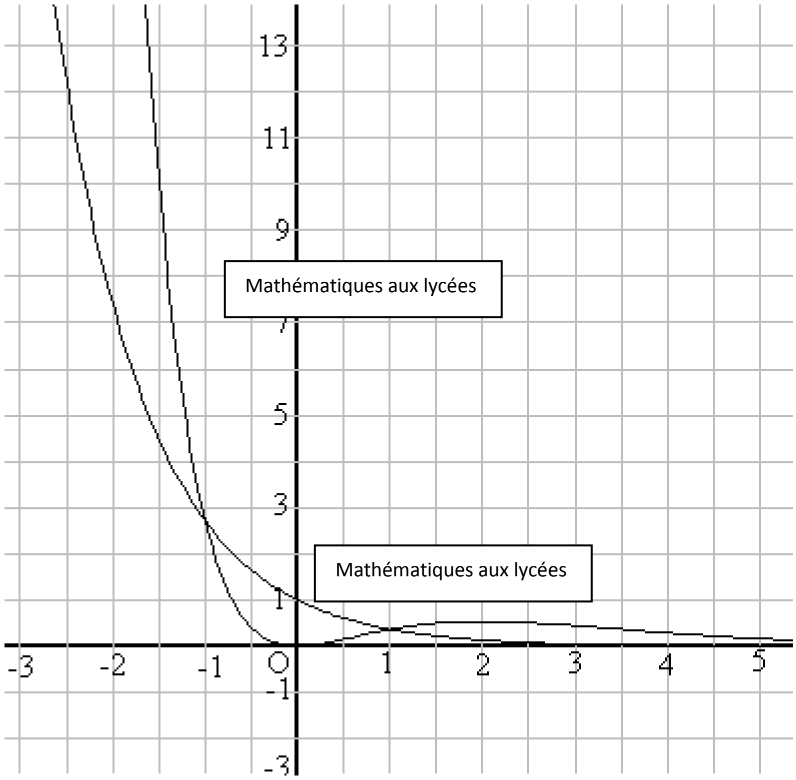
On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_2^x f(t)\,dt$$

1. Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$,
2. Montrer que $0 < F(3) < 4e^{-2}$.

Partie B

La fonction f considérée dans la partie A est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^{-x}$.
On appelle g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-x}$.
On désigne par (C) et (Γ) les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$
Les courbes sont tracées en annexe.
1. a) Montrer que les variations de la fonction f sont bien celles données dans la partie A.
On ne demande pas de justifier les limites.
b) Étudier les positions relatives des courbes (C) et (Γ).
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x^2 - l)e^{-x}$.
a) Montrer que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (-x^2 - 2x - l)e^{-x}$ est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
b) Soit un réel α supérieur ou égal à 1.
On considère la partie du plan limitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.
Déterminer l'aire A(α), exprimée en unité d'aire, de cette partie du plan.
c) Déterminer la limite de A(α) lorsque α tend vers $+\infty$
3. On admet que, pour tout réel m strictement supérieur à $4e^{-2}$, la droite d'équation $y = m$ coupe la courbe (C) au point P(x_P; m) et la courbe (T) au point Q(x_Q; m).
L'objectif de cette question est de montrer qu'il existe une seule valeur de x_P appartenant à l'intervalle $]-\infty, -l]$ telle que la distance PQ soit égale à 1.
a) Faire apparaître approximativement sur le graphique (proposé en annexe, page 7) les points P et Q tels que $x_P \in]-\infty, -1]$ et PQ = 1.
b) Exprimer la distance PQ en fonction de x_P et de x_Q. Justifier l'égalité $f(x_P) = g(x_Q)$.
c) Déterminer la valeur de x_P telle que PQ = 1.



Exercice 31 -correction-

EXERCICE 4 (6 points)

Partie A

On donne le tableau de variation d'une fonction *f* dérivable sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	$+\infty$	↘	0	↗	$4e^{-2}$	↘	0

Mathématiques aux lycées

On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$par

$$F(x) = \int_2^x f(t)\,dt$$

1. La fonction *f* est la dérivée de la fonction F sur $\mathbb{R}$et sur le tableau de variation on peut déduire le signe de *f*(*x*) selon les valeurs de *x* , F'(*x*) = *f*(*x*) $\geq$0 pour tout réel *x* donc F est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que 0 < F(3) < $4e^{-2}$.

D'après le tableau de variation de la fonction *f* pour tout réel *x* de]2 ; + ∞[on a :

$$0 < f(x) < 4e^{-2} \Rightarrow$$

$$0 < \int_2^3 f(x)dx < \int_2^3 4e^{-2}dx \Rightarrow$$

$$0 < F(3) < 4e^{-2}\int_2^3 1dx = 4e^{-2}\left[x\right]_2^3 = 4e^{-2}$$

Partie B

1. a) Pour tout réel *x* on a :

$f(x) = x^2e^{-x}$ (forme uv)

$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$

$f'(x)$ est du signe de $x(2 - x)$ car $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$

Or $x(2 - x)$ est bien un polynôme du second degré ayant deux racines 0 et 2 et donc le signe est négatif à l'extérieur de ses racines, donc les variations de f correspondent au signe de $f'(x)$.

Les valeurs des extremums correspondent également : $f(0) = 0$ et $f(2) = 4e^{-2}$.

b) Il suffit pour cela d'étudier le signe de $f(x) - g(x)$

$f(x) - g(x) = x^2e^{-x} - e^{-x} = (x^2-1)e^{-x} = (x-1)(x+1)e^{-x}$

Cette différence est du signe du polynôme $(x - 1)(x + 1)$ car $e^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$cequi donne comme tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		+	0	-	0	+	

Sur $]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$ la courbe (C) est au dessus de la courbe (Γ)

Sur $[-1 ; 1]$ la courbe la courbe (C) est au dessous de la courbe (Γ)

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$par $h(x) = (x^2 - l)e^{-x}$.

a) Pour tout réel x on a :

$H(x) = (-x^2 -2x - l)e^{-x}$ donc

$H'(x) = (2x -2)e^{-x} - (-x^2 -2x - l)e^{-x} = (-2x -2 + x^2 + 2x + l)e^{-x} = (x^2 - l)e^{-x} = h(x)$

donc H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

b) Sur l'intervalle $[1 ; \alpha]$ la courbe (C) est au dessus de la courbe (Γ) (voir question 1) donc l'aire $A(\alpha)$ exprimée en unité d'aire est :

$$\int_1^\alpha f(x) - g(x)dx = \int_1^\alpha h(x)dx = \left[H(x)\right]_1^\alpha = \left[(-x^2-2x-1)e^{-x}\right]_1^\alpha$$

$$= (-\alpha^2 - 2\alpha - 1)e^{-\alpha} - (-1^2-2-1)e^{-1} = \boxed{-(\alpha^2+2\alpha+1)e^{-\alpha} + 4e^{-1}}$$

c)

$$A(\alpha) = -(\alpha^2+2\alpha+1)e^{-\alpha} + 4e^{-1} = -\alpha^2e^{-\alpha} - 2\alpha e^{-\alpha} - e^{-\alpha} + 4e^{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\alpha \to +\infty} -\alpha^2e^{-\alpha} = 0 \\ \lim\limits_{\alpha \to +\infty} -2\alpha e^{-\alpha} = 0 \\ \lim\limits_{\alpha \to +\infty} -e^{-\alpha} = 0 \\ \lim\limits_{\alpha \to +\infty} 4e^{-1} = 4e^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\alpha \to +\infty} A(\alpha) = 4e^{-1}$$

3. On admet que, pour tout réel m strictement supérieur à $4e^{-2}$, la droite d'équation $y = m$ coupe la courbe (C) au point $P(x_P; m)$ et la courbe (T) au point $Q(x_Q; m)$.

L'objectif de cette question est de montrer qu'il existe une seule valeur de x_P appartenant à l'intervalle $]-\infty ,-l]$ telle que la distance PQ soit égale à 1.

a) Faire apparaître approximativement sur le graphique (proposé en annexe, page 7)

les points P et Q tels que $x_P \in]-\infty,-1]$ et PQ = 1.

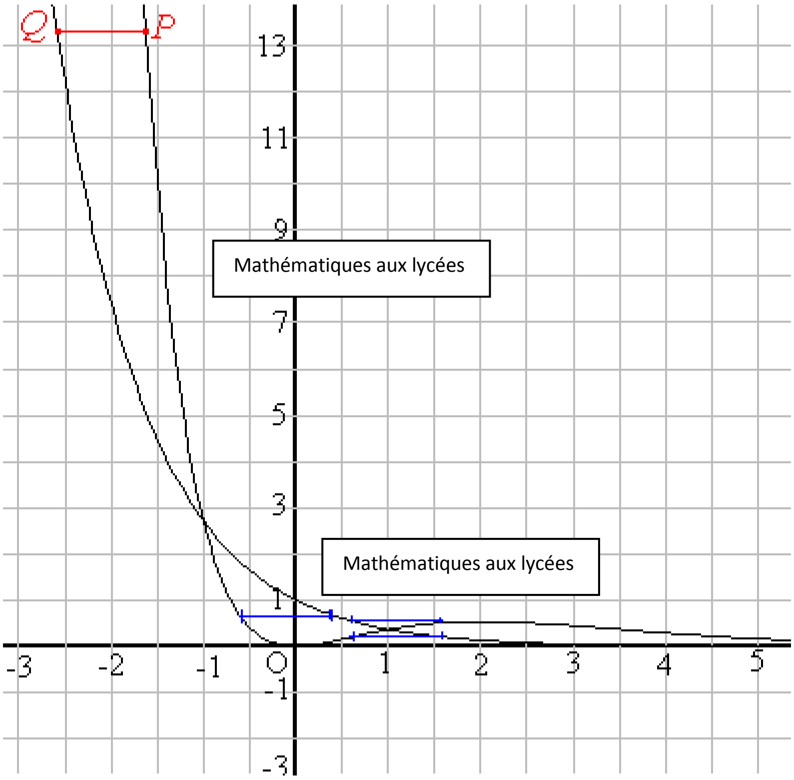
b) $PQ = | x_P - x_Q |$ les deux points d'abscisses respectives x_P et de x_Q appartiennent respectivement aux deux courbes (C) et (Γ) et on la même ordonnée donc $f(x_P) = g(x_Q)$.

c)

$$\begin{cases} f(x_P) = g(x_Q) \\ |x_P - x_Q| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P^2 e^{-x_P} = e^{-x_Q} \\ |x_P - x_Q| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P^2 = e^{x_P - x_Q} \\ |x_P - x_Q| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_P^2 = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \quad ou \quad x_P^2 = e \\ |x_P - x_Q| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \; ou \; x_P = \dfrac{-1}{\sqrt{e}} \; ou \; x_P = \sqrt{e} \; ou \; x_P = -\sqrt{e} \\ |x_P - x_Q| = 1 \end{cases}$$

$$x_P = \frac{1}{\sqrt{e}} \notin \left]-\infty ; -1\right]; \; x_P = \frac{-1}{\sqrt{e}} \notin \left]-\infty ; -1\right]; \; x_P = \sqrt{e} \notin \left]-\infty ; -1\right]; \; \boxed{x_P = -\sqrt{e} \in \left]-\infty ; -1\right]}$$



La solution est en rouge et les autres sont en bleu.

Exercice 32

EXERCICE 2 (11 points)

Partie A

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle [0 ; 3] par $f(x) = 6\text{-}5xe^{-2x+2}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

d'unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. a) Montrer que, pour tout x de l'intervalle [0 ; 3], $f'(x) = 5(2x - l)e^{-2x+2}$.

b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [0 ; 3].

c) Déterminer les valeurs exactes de $f(0)$, $f(0,5)$, $f(3)$ et dresser le tableau de variation de *f*

2. a) Donner les valeurs arrondies au dixième de $f(x)$pour les valeurs suivantes de *x* :

0,25;0,5;l; 1,5; 2; 2,5 ; 3.

b) Calculer les coefficients directeurs des tangentes à C aux points d'abscisses : x_1= 0,75 , x_2 = 1 et x_3 = 1,25. (On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près). Pour laquelle de ces abscisses, le coefficient directeur est-il le plus grand ?

3. a) Tracer les tangentes à la courbe C aux points d'abscisses x_1 , x_2 et x_3

b) Tracer la courbe C.

Partie B

On considère que la courbe C donne un modèle de la variation de la température de l'eau en fonction de la profondeur près de l'estuaire d'un grand fleuve un jour d'hiver.

La température est exprimée en degrés Celsius et la profondeur en centaines de mètres.

1. A quelle profondeur la température de l'eau est-elle minimale ?

2. Déterminer graphiquement pour quelles profondeurs la température est comprise entre 0°C et 4°C. Faire figurer les constructions utiles.

3. En utilisant la question **A.2**., indiquer au voisinage de quelle profondeur, entre 50 m et 300 m, la température de l'eau augmente le plus rapidement.

Correction-

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 3] par $f(x) = 6\text{-}5xe^{-2x+2}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. a) Pour tout x de l'intervalle [0 ; 3],

$$f(x) = 6 - 5xe^{-2x+2}$$

$$f'(x) = 0 - 5\left(1e^{-2x+2} - 2xe^{-2x+2}\right) = -5(1-2x)e^{-2x+2} = 5(2x-1)e^{-2x+2}$$

b) $f'(x)$ est du signe de $(2x - 1)$ car $e^{-2x+2} > 0$ sur l'intervalle [0 ; 3].

$2x - 1 > 0$ si et seulement si $x > 1/2$

$2x - 1 < 0$ si et seulement si $x < 1/2$

$2x - 1= 0$ si et seulement si $x = 1/2$

c)

$$f(0) = 6 - 0 = 6 \quad ; f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 - 5\times\frac{1}{2}e^{-2\times\frac{1}{2}+2} = 6 - \frac{5}{2}e^{-1+2} = 6 - \frac{5e}{2}$$

$$f(3) = 6 - 5\times 3e^{-2\times 3+2} = 6 - 15e^{-4} = 6 - \frac{15}{e^4}$$

x	0		1/2		3
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	6	↘	6-5e/2	↗	6 - 15/e⁴

2. a)

x =	0,3	0,5	1	1,5	2	2,5	3
f(x) =	0,4	-0,8	1,0	3,2	4,6	5,4	5,7

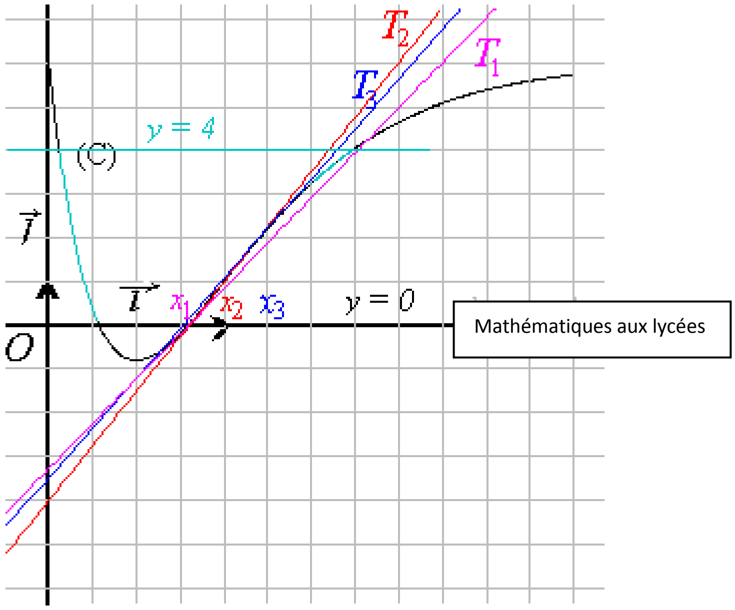
b)Les coefficients directeurs des tangentes à C aux points d'abscisses : $x_1= 0,75$, $x_2 = 1$ et $x_3 = 1,25$ sont respectivement : $f'(0,75) = 4,12$; $f'(1) = 5$; $f'(1,25) = 4,55$

C'est au point d'abscisse $x_2 = 1$ que le coefficient directeur est le plus grand.

3. a) b)

Ordonnées des points d'abscisses $x_1 = 0,75$ et $x_3 = 1,25$

$f(0,75) = -0,18$; $f(1,25) = 2,21$



Partie B

On considère que la courbe C donne un modèle de la variation de la température de l'eau en fonction de la profondeur près de l'estuaire d'un grand fleuve un jour d'hiver.
La température est exprimée en degrés Celsius et la profondeur en centaines de mètres.

1. *f* atteint son minimum en $x = 0{,}5$, la température de l'eau est minimale pour une profondeur de 50 mètres , cette température minimal est environ de -0,8 ° C.

2. Il suffit de prendre les abscisses des points de la courbe qui sont situé entre les droites d'équation y = 0 et y = 4, on lit graphiquement $x \in [0{,}05 ; 0{,}30] \cup [0{,}75 ; 1{,}75]$,
les profondeurs où la température est comprise entre 0°C et 4°C. sont entre 5 m et 30 m et entre 75 m et 175 m.

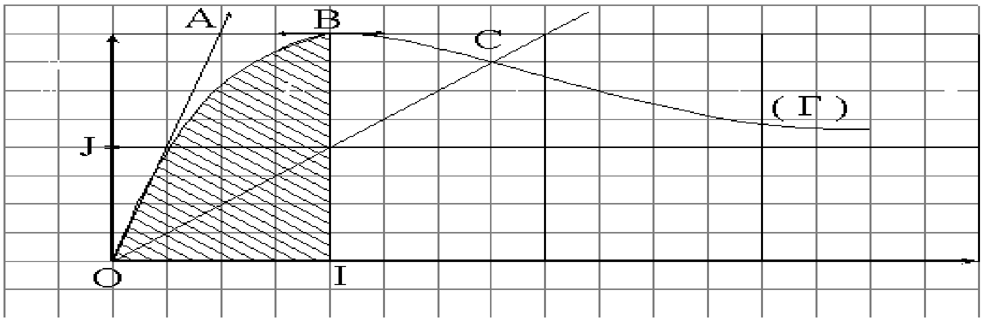
3. Le coefficient directeur est le plus grand pour $x = 1$, c'est à dire au environ de 100 mètre de profondeur c'est à cette profondeur environ que la température de l'eau augmente le plus rapidement.

Exercice 33

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormal du plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unités graphiques 2 cm, la courbe (Γ), tracée ci-dessous, est la représentation graphique d'une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle [0 ; 3,5].

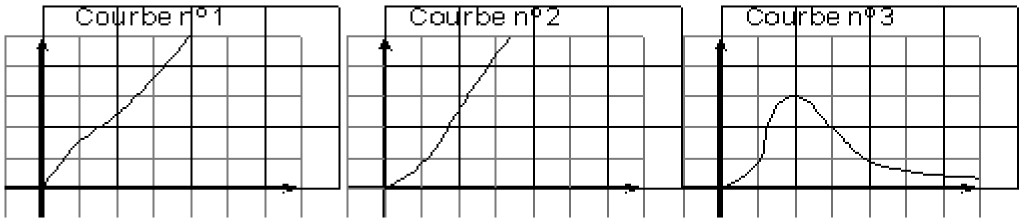
- I et J sont les points du plan tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$;
- C est le point de (Γ) situé sur la bissectrice de $\widehat{IOJ}$
- (OA) est la tangente en O à (Γ) ;
- S est la surface hachurée sur la figure ci-dessous :



1. Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :
a. Quel est le tableau de variations de g sur [0 ; 3,5]?
b. Quelles sont les valeurs de g '(0) et de g '(1) ?
c. Quelles sont les coordonnées du point C?
d. Résoudre l'inéquation g $(x) \geq x$ sur [0 ; 3,5].
2. Définir la surface S par un système d'inéquations et déterminer graphiquement un encadrement de l'aire de S d'amplitude 2 cm².
Rappel : l'aire d'un trapèze est donnée par la formule:

$$A = \frac{(B+b)h}{2}$$

B et b sont les bases du trapèze et h sa hauteur.
3. On suppose que l'une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la primitive de la fonction g s'annulant en 0. En justifiant l'élimination de deux des courbes, indiquer celle qui est la représentation graphique de cette primitive.



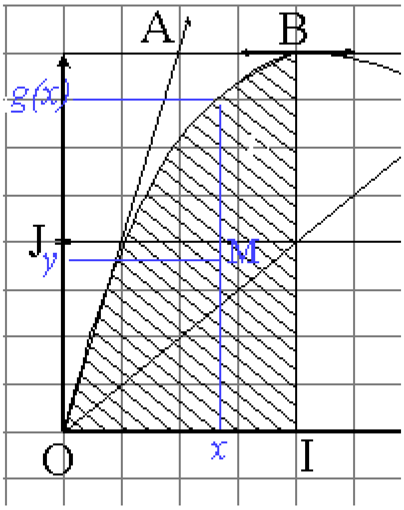
Correction

1.a.

x	0		1		3,5
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	0	↗	2	↘	1,15

b. g '(0) est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0, par lecture graphique on lit : g'(0) = 4. et de g '(1) est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1, or cette tangente est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est nul :
g'(1) = 0.
c. Le point C a pour coordonnée (7/4 ; 7/4)
d. La courbe représentative de la fonction g est au dessus de la droite d'équation $y = x$ sur l'intervalle [0 ; 7/4] , donc l'ensemble des solutions de l'inéquation g $(x) \geq x$ sur[0 ; 3,5] est [0 ; 7/4].
2. S est l'ensemble des points M de coordonnées (x ; y) tels que :

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le g(x) \end{cases}$$



l'aire de S est encadrée par l'aire du triangle OBI et l'aire du trapèze OABI

$$Aire(OBI) = \frac{OI \times IB}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1 u.a = 1 \times 4\ cm^2 = 4\ cm^2$$

$$Aire(OABI) = \frac{(AB + OI) \times IB}{2} = \frac{\left(\frac{1}{2} + 1\right) \times 2}{2} =$$

$$\frac{3}{2} u.a = \frac{3}{2} \times 4\ cm^2 = 6\ cm^2$$

$$4 \le Aire(S) \le 6$$

3. Soit G une primitive de la fonction g , g est donc la dérivée de G et d'après ce qui précéde on doit avoir G croissante puisque g est positive sur l'intervalle [0 ; 3,5]

donc on élimine la courbe n° 3 qui ne vérifie pas ces conditions.

On sait que G'(0) = g(0) = 0 donc la courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0 de la courbe, ce qui élimine le choix de la courbe n° 1.

La bonne réponse est la courbe n° 2.

Exercice 34

Tableau d'informations n°1.

x	$-\infty$	-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
signe de u(x)	+	0	-		-	0	+	
signe de u'(x)	-		-	0	+		+	

Le tableau d'informations n°1 ci-dessus fournit des informations sur une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Établir un tableau des variations de la fonction u.

On considère maintenant les fonctions *f* et g définies par *f* (*x*) = ln[u(*x*)] et g (*x*) = $e^{u(x)}$ où u désigne la fonction de la question précédente.

2. a. Une des deux affirmations suivantes est fausse, laquelle? Justifier en précisant le bon ensemble de définition :

Affirmation 1 : « La fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$ » ;

Affirmation 2 : « La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ ».

b. Donner les variations des fonctions *f* et g . Énoncer le(s) théorème(s) utilisé(s).

c. Déterminer, en justifiant avec soin,

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x)$$

d. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation g (x) = 1.

3. Voici d'autres informations relatives à la fonction u et à sa dérivée u'.

Tableau d'informations n°2.

x	-2	0	1/2	2	3
u(x)	4	-2	-9/4	0	4
u'(x)	-5	1	0	3	5

Terminer chacune des deux phrases a. et b. par la réponse qui vous semble exacte, parmi celles proposées dans les cadres ci-dessous, en justifiant votre choix.

a. La tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 2 est parallèle :

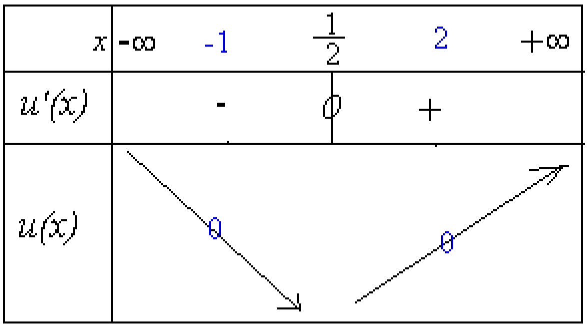
- à l'axe des abscisses
- à la droite d'équation y = x
- à la droite d'équation y = 3x

b. Le nombre *f* '(-2) :

- n'existe pas
- vaut -20
- vaut - 4/5
- vaut - 5/4
- vaut 5/4

Correction

1.



2. a

L'affirmation 1 est fausse , en effet la fonction *f* est définie à condition que u(*x*) > 0 ce qui se produit si x ∈] - ∞; -1 [∪] 2 ; + ∞[donc l'ensemble de définition de la fonction f est :] - ∞; -1 [∪] 2 ; + ∞[

l'affirmation 2 est juste , la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$.

2. b.

La fonction u est décroissante et strictement positive sur l'intervalle] - ∞; -1 [

la fonction ln est croissante sur]0 ; + ∞[on en déduit que la fonction f composée de la fonction u suivie de la fonction ln est décroissante sur] - ∞; -1 [

La fonction u est croissante et strictement positive sur l'intervalle] 2 ; + ∞[

la fonction ln est croissante sur]0 ; + ∞[on en déduit que la fonction f composée de la fonction u suivie de la fonction ln est croissante sur] 2 ; + ∞[.

La fonction u est décroissante sur l'intervalle] - ∞; 1/2]
la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction g composée de la fonction u suivie de la fonction exponentielle est décroissante sur] - ∞; 1/2]
La fonction u est croissante sur l'intervalle [1/2 ; + ∞[
la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction g composée de la fonction u suivie de la fonction exponentielle est croissante sur [1/2 ; + ∞[

2. c.

$$f(x) = \ln u(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} u(x) = 0^+ \\ \lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ X > 0}} \ln X = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty$$

2.d.

$$g(x) = 1 \Leftrightarrow$$
$$e^{u(x)} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\ln e^{u(x)} = \ln 1 \Leftrightarrow$$
$$u(x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = -1 \text{ ou } x = 2$$

3.

a. La fonction g est définie est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculons le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 2 :

$$g(x) = e^{u(x)}$$
$$g'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$
$$g'(2) = u'(2)e^{u(2)} = 3e^0 = 3$$

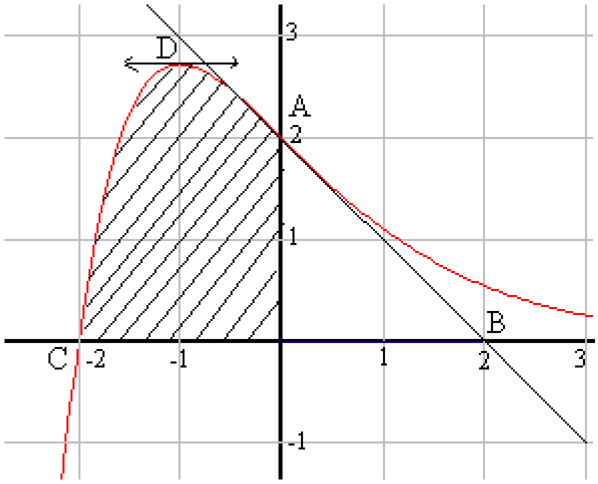
le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 2 de la courbe représentative de g est égal à 3, donc la tangente est parallèle à la droite d'équation y = 3x

b. La fonction *f* est dérivable sur l'ensemble des valeurs x telles que u(*x*) > 0 c'est à dire sur] - ∞; -1 [∪] 2 ; + ∞[, elle est donc dérivable en -2 et on a pour tout réel de cet ensemble :

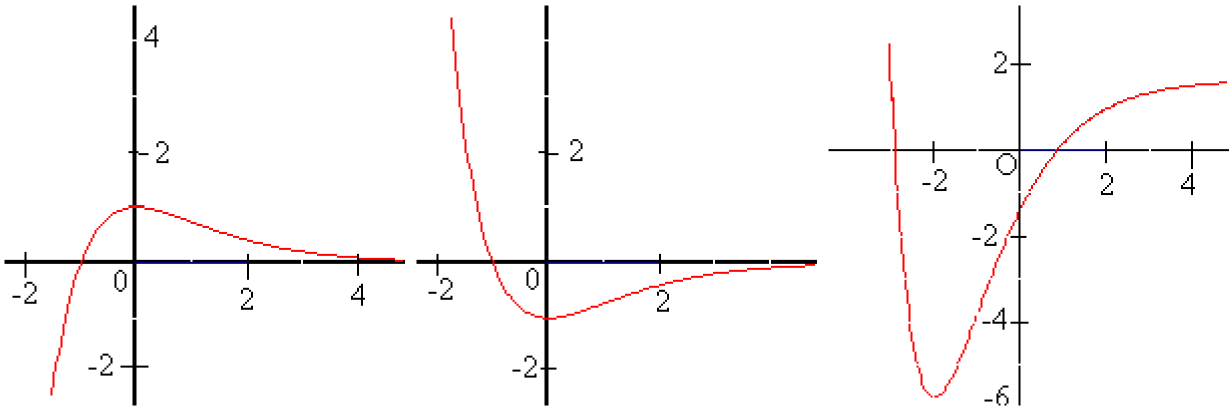
$$f(x) = \ln u(x)$$
$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$
$$f'(-2) = \frac{u'(-2)}{u(-2)} = \frac{-5}{4}$$

Exercice 35

On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ, dans un repère orthononnal,
d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La courbe Γpasse par les points A(0 ;2) et C(-2 ; 0)
et la droite (AB) est la tangente en A à Γ.
La tangente à Γen son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.



Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F.
Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix

2. a. Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

b. On suppose que $f(x)$ est de la forme $f(x) = (x + \mathrm{K})e^{ax}$ où K et a sont des constante réelles.

Calculer $f'(x)$ puis traduire les renseignements trouvés à la question précédente par un système d'équations d'inconnues K et a.

En déduire que f est définie par $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

3. a. Montrer que la fonction définie par $\Phi(x) = (-x-3)e^{-x}$ est une primitive de f.

b. En déduire la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface hachurée. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième du résultat.

Correction

1.D'après la courbe représentative de la fonction f on voit que f est croissante sur] - ∞; - 1] et décroissante sur [-1 ; + ∞[ce qui donne des indications sur le signe de $f\,'(x)$

La **courbe n° 2** est la courbe représentative de la fonction dérivée de f en effet, la courbe 2 est au dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle [-1 ; + ∞[donc ce qui correpond au signe de $f\,'(x)$ (négatif) sur cet intervalle, de même sur l'intervalle] - ∞; - 1] la courbe 2 est au dessus de l'axe des abscisses ce qui correspond au signe de $f\,'(x)$ (positif) sur l'intervalle] - ∞; - 1] .

La **courbe n° 3** est la courbe représentative d'une primitive de la fonction f en effet , ses variations correspondent bien avec les signe de $f(x)$:

$f(x) \geq 0$ et F croissante sur [-2 ; + ∞[

$f(x) \leq 0$ et F décroissante sur]- ∞; - 2]

2. a.

La courbe Γ passe par le point A(0 ;2) donc $f(0) = 2$

La droite (AB) est tangente en A(2 ; 0) à la courbe Γ et son coefficient directeur est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-2}{2-0} = \frac{-2}{2} = -1$$

donc $f\,'(0) = -1$

b. $f(0) = 2$ donc $(0 + K)e^0 = 2$ d'où K = 2

$f\,'(x) = (1 + 0)e^{ax} + (x + K)ae^{ax}$

$f\,'(x) = e^{ax} + (x + 2)ae^{ax}$

$f\,'(x) = (ax + 2a + 1)e^{ax}$ (en mettant en facteur , mais ce n'est pas obligé)

$f\,'(0) = -1$ donc $(2a + 1)e^0 = -1$ d'où $2a + 1 = -1$ d'où $a = -1$

En reportant les valeurs de a et K on en déduit que f est définie par $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

3. a. $\varphi(x) = (-x-3)e^{-x}$

$\varphi'(x) = (-1)e^{-x} + (-x-3)(-e^{-x}) = (-1 + x + 3)e^{-x} = (x + 2)e^{-x} = f(x)$

donc la fonction définie par $\varphi(x) = (-x-3)e^{-x}$ est une primitive de f .

3. b.

sur l'intervalle [-2 ; 0] , $f(x) = (x + 2)e^{-x} > 0$ donc la courbe représentative de f est au dessus de l'axe des abscisses et l'aire du domaine recherché est en unité d'aire :

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx = \left[\varphi(x)\right]_{-2}^{0} = \left(-0-3\right)e^0 - \left(-(-2)-3\right)e^2$$

$$= -3 - \left(-1\right)e^2 = e^2 - 3 \approx 4,39\ u.a.$$

Exercice 36

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; + ∞[par $f(x) = (x - 1)(2 - e^{-x})$

Sa courbe représentative C est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2 cm)

1.a. Etudier la limite de f en + ∞

1.b. Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à C

1.c. Etudier les positions relatives de C et Δ

2.a. Calculer $f\,'(x)$ et montrer que $f\,'(x) = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$

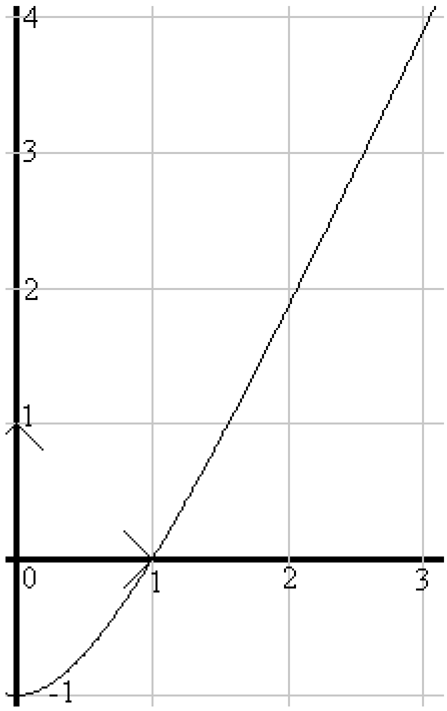
2.b. En déduire que pour tout réel x strictement positif , $f\,'(x) > 0$

2.c. Préciser la valeur de $f\,'(0)$, puis établir le tableau de variation de f

3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm², du domaine plan limité par la courbe C , la droite Δ et les droite d'équation x = 1 et x = 3

4.a. Déterminer le point A ou la tangente est parallèle à Δ

4.b. Calculer la distance, exprimée en cm du point A à la droite Δ.



Correction

1. a.

$$f(x) = (x-1)(2-e^{-x})$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(2-e^{-x}) = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

1. b .

$$f(x)-(2x-2) = (x-1)(2-e^{-x}) - 2x+2$$

$$= 2x - xe^{-x} - 2 + e^{-x} - 2x + 2 = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x} - \frac{x}{e^{x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{x}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(2x-2) = 0$$

on en déduit que la droite Δ d'équation y = 2x - 2 est asymptote à la courbe représentative C de *f*.

1. c .

$$f(x)-(2x-2) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

$f(x) - (2x - 2)$ est du signe de $1 - x$ car $e^{-x} > 0$ sur $[0 ; +\infty[$

- si $x \in [0 ; 1]$ c'est à dire si $0 \le x \le 1$, $1 - x \ge 0$ et dans ce cas la courbe C sera au dessus de la droite Δ
- si $x \in [1 ; +\infty[$, c'est à dire si $x \ge 1$, $1 - x \le 0$ et dans ce cas la courbe C sera au dessous de la droite Δ.

2. a.La fonction *f* est dérivable comme produit de fonction dérivable sur [0 ; + ∞[et pour tout réel *x* de l'intervalle [0 ; + ∞[

$$f'(x) = 1(2 - e^{-x}) + (x-1)e^{-x}$$

$$= 2 - e^{-x} + xe^{-x} - e^{-x}$$

$$= xe^{-x} + 2 - 2e^{-x} = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x})$$

2.b.

$$x > 0 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow e^{-x} < 1 \Rightarrow 1 - e^{-x} > 0 \Rightarrow 2(1 - e^{-x}) > 0$$

$$or\ xe^{-x} > 0 \text{ sur } [0; +\infty[$$

$$\text{donc } f'(x) = xe^{-x} + 2(1 - e^{-x}) > 0 \text{ sur } [0; +\infty[$$

2.c.

f '(0) = 0 + 2(1 - 1) = 0

f(0) = (0 - 1)(2 - 1) = -1

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3. Sur l'intervalle [1 ; 3] , la courbe C est en dessous de la droite Δ, donc l'aire en unité d'aire du domaine demandée est :

$$\int_1^3 (2x - 2) - f(x)dx = \int_1^3 (x-1)e^{-x}dx$$

$$\begin{cases} u' = e^{-x} \Rightarrow u = -e^{-x} \\ v = x - 1 \Rightarrow v' = 1 \end{cases}$$

$$\int_1^3 (x-1)e^{-x}dx = \left[(1-x)e^{-x}\right]_1^3 - \int_1^3 -e^{-x}dx$$

$$= -2e^{-3} - \left[e^{-x}\right]_1^3 = -2e^{-3} - \left(e^{-3} - e^{-1}\right) = e^{-1} - 3e^{-3}$$

$$= \frac{1}{e} - \frac{3}{e^3}$$

ce qui donne en tenant compte de l'unité d'aire 4 cm² :

$$4\left(\frac{1}{e} - \frac{3}{e^3}\right)cm^2$$

4. a. au point A la tangente est parallèle à Δ, donc elle a le même coefficient directeur que Δsoit *x* l'abscisse de A :

$f'(x) = 2 \Leftrightarrow$

$xe^{-x} + 2(1 - e^{-x}) = 2 \Leftrightarrow$

$xe^{-x} + 2 - 2e^{-x} = 2 \Leftrightarrow$

$(x - 2)e^{-x} = 0 \Leftrightarrow$

$x = 2$ qui est l'abscisse du point A

ordonnée de A

$f(2) = (2 - 1)(2 - e^{-2}) = 2 - e^{-2}$

Le point A a pour coordonnées

$A(2; 2 - e^{-2})$

4.b.

$\Delta : y = 2x - 2$

$\Delta : 2x - y - 2 = 0$

$$d(A,\Delta) = \frac{|2x_A - y_A - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|2 \times 2 - \left(2 - e^{-2}\right) - 2\right|}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{e^{-2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5e^2} \text{ unité de longueur} = \frac{2\sqrt{5}}{5e^2} cm$$

Exercice 37

Soit la fonction f numérique définie pour tout nombre réel par
$f(x) = 2 + (2 - x)e^{2x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$
(unité graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées)

1. Déterminer la limite de f en + ∞.

2. a. Déterminer la limite de f en - ∞(on pourra poser X = $2x$)

2. b. En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

2. c. Etudier les positions relatives de $\mathscr{C}$ et Δ.

3.a. Montrer que $f'(x) = (3 - 2x)e^{2x}$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

4. a. Donner une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

4. b. Tracer Δ, T puis $\mathscr{C}$.

5. Soit G la fonction numérique définie pour tout nombre réel x par :

$$G(x) = -\frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{5}{4}e^{2x}$$

Montrer que G est une primitive de la fonction g définie pour tout nombre réel x par
$g(x) = (2 - x)e^{2x}$.

6.a Hachurer la partie A du plan limitée par $\mathscr{C}$, la droite d'équation y = 2 et l'axe des ordonnées.

6.b. Calculer l'aire de A.

En donner la valeur exacte en unités d'aire.

Donner une valeur arrondie de cette aire, en cm², à 10^{-2} près.

Correction

1.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)e^{2x}=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$$

2.a.

Première méthode :

$$f(x)=2+(2-x)e^{2x}=2+2e^{2x}-xe^{2x}=2+2e^{2x}-xe^{x}e^{x}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{x}e^{x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}2=2\\ \lim\limits_{x\to-\infty}2e^{2x}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$$

Seconde méthode :

en posant X = 2*x* :

$$f(x)=2+(2-x)e^{2x}=2+2e^{2x}-xe^{2x}=2+2e^{X}-\frac{X}{2}e^{X}$$

$$\lim\limits_{x\to-\infty}X=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{X\to-\infty}2=2\\ \lim\limits_{X\to-\infty}2e^{X}=0\\ \lim\limits_{X\to-\infty}\frac{X}{2}e^{X}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim\limits_{X\to-\infty}\left(2+2e^{X}-\frac{X}{2}e^{X}\right)=2\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$$

2.b. de la dernière limite calculée on en déduit que la courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite Δ d'équation *y* = 2 en - ∞.

2.c.

$f(x)-2=2+(2-x)e^{2x}-2=(2-x)e^{2x}$.

$f(x)-2$ est du signe de $(2-x)$ car $e^{2x}>0$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)-2$		$+$	0	$-$	

- sur l'intervalle]- ∞; 2] la courbe est au dessus de la droite Δ.
- sur l'intervalle [2 ; + ∞[la courbe est au dessous de la droite Δ.

3.a.

la fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel *x* on a :

$f'(x)=(-1)e^{2x}+(2-x)(2e^{2x})=(-1)e^{2x}+(4-2x)e^{2x}=(3-2x)e^{2x}$.

3.b.

$f'(x)$ est du signe de $(3-2x)$ car $e^{2x}>0$, on en déduit les variations de *f* sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$2+\frac{e^{3}}{2}$	↘	2

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)e^{2\times\frac{3}{2}} = 2 + \frac{1}{2}e^{3} = 2 + \frac{e^{3}}{2}$$

4.a.

Coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0 :

$f'(0) = 3$

Ordonnée du point d'abscisse 0 :

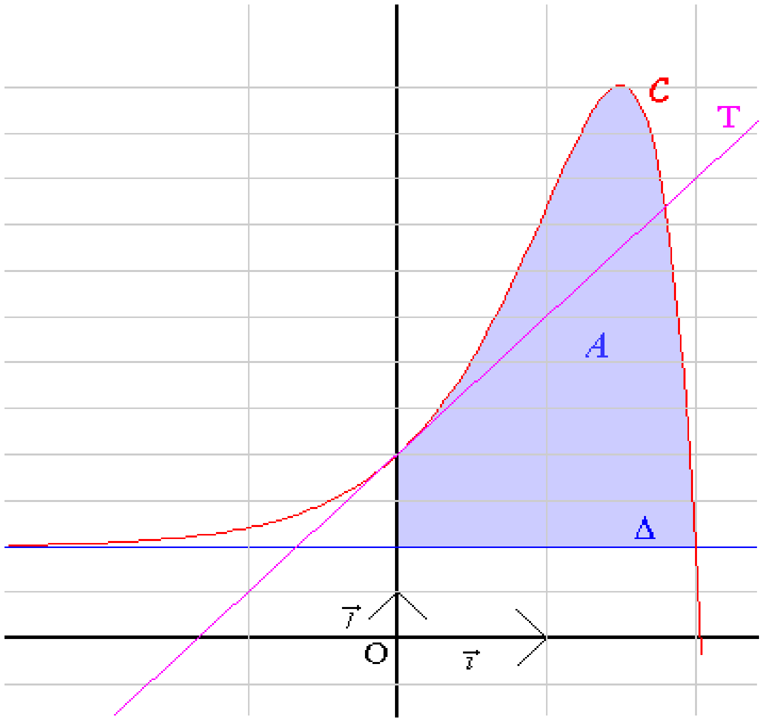
$f(0) = 2 + 2 = 4$

Equation de la tangente au point d'abscisse 0 :

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$y = 3x + 4$

4. b.- 6.a



5.

La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$G'(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}x(2e^{2x}) + \frac{5}{4}(2e^{2x}) = -\frac{1}{2}e^{2x} - xe^{2x} + \frac{5}{2}e^{2x}$$

$$= \frac{4}{2}e^{2x} - xe^{2x} = (2 - x)e^{2x} = g(x)$$

donc G est une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

6.a voir 4.b

6.b.

L'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec la droite Δ est le point de coordonnées (2 ; 2) voir question 2. a. , l'aire est donc délimitée par les droites d'équation $x = 0$, $x = 2$, la courbe et la droite d'équation $y = 2$, sur l'intervalle [0 ; 2] la courbe représentative de f est au dessus de la droite d'équation $y = 2$. (question 2. a).

En unité d'aire :

$$A = \int_0^2 (f(x) - 2)dx = \int_0^2 g(x)dx = [G(x)]_0^2 = \left[-\frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{5}{4}e^{2x} \right]_0^2$$

$$A = \left[-\frac{1}{2}2e^4 + \frac{5}{4}e^4 - \left(-\frac{1}{2}0 \times e^0 + \frac{5}{4}e^0 \right) \right] = \left[-e^4 + \frac{5}{4}e^4 - \frac{5}{4} \right] = \frac{e^4 - 5}{4}$$ l'unité d'aire est de 4 cm² (4 $\times$1) donc la valeur exacte de A en cm² est e^4 - 5 $\simeq$49,60 cm²

Exercice 38(non corrigé)

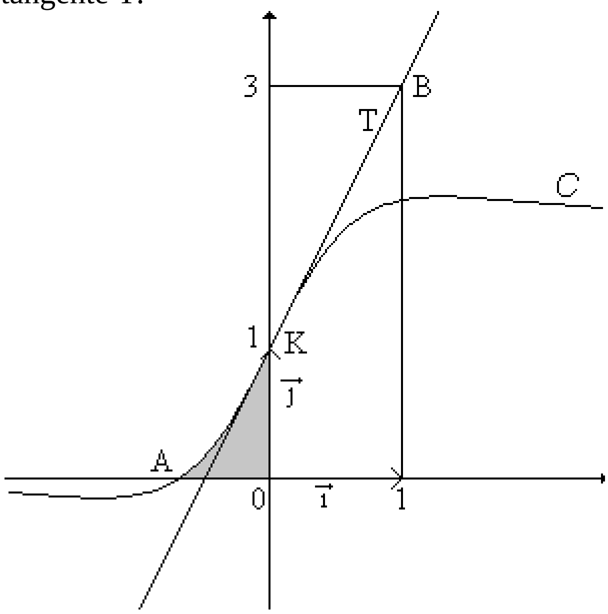
Partie A - Etude graphique d'une fonction

Soit *f* la fonction définie sur]- ∞; + ∞[par :

$$f(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$$

On trouvera sur le graphique ci-après, le tracé de la courbe C représentative de f et le tracé de la tangente à la courbe C au point K(0 ; 1) , dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On admet que le point K est centre de symétrie de la courbe C et que le point B(1; 3) appartient à la tangente T.



1. On se propose de démontrer certaines propriétés de la courbe C.

a. Etudier la limite de f en - ∞et préciser l'asymptote à C correspondante

b. On admet que pour tout réel x, f(x) peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = \frac{2 - e^{-x}}{1 - e^{-x} + e^{-2x}}.$$

En déduire la limite en + ∞et préciser l'asymptote à C correspondante.

c. Vérifier par le calcul, que le point A(-ln2, 0) est un point de la courbe C.

2. Grâce à une lecture graphique, répondre aux questions suivantes en justifiant vos réponses.

a. Déterminer la valeur de *f'(0)*

b . Donner le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

Partie B - Etude d'une primitive de f sur]- ∞; + ∞[

Soit F la fonction définie sur]- ∞; + ∞[par :

$$F(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$$

et (Γ) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier la limite de F en - ∞. Interpréter graphiquement ce résultat pour la courbe (Γ).

2. a. vérifier que pour tout réel x , F(x) peut s'écrire : $F(x) = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$.

b. Calculer la limite de F en + ∞, puis la limite de F(x) - (2x) en + ∞

c. En déduire que la courbe (Γ) admet une asymptote.

3. a. Démontrer que f est la fonction dérivée de F sur]- ∞; + ∞[

b. Vérifier que F(-ln2) = ln (3/4)

c. Déduire de la **partie A** le tableau de variation de la fonction F.

4. Recopier et compléter le tableau suivant en donnant les résultats à 10^{-2} près :

x	-3	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2	2,5
F(x)									

5. Sur une feuille de papier millimétré, tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités graphiques 4 cm, les droites d'équations respectives y = 2x et y = 0, puis la courbe (Γ).

Partie C - Calcul d'une aire

1. Calculer la valeur exacte de $\int_{-\ln 2}^{0} f(x)dx$.

2. En déduire la valeur exacte en cm² de l'aire du domaine AOK (grisé sur la courbe jointe) et en donner une valeur approchée à un millimètre carré près par excès.

Exercice 39

__Partie A__ :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par g(x) = $e^x(x + 3) - 1$

1. Déterminer la limite de g en + ∞ et la limite de g en - ∞.

2. Déterminer, à l'aide de la dérivée g', le sens de variation de g. En déduire le tableau de variation de g.

3. Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α qui appartient à l'intervalle]-4 ; 0[.

4. Déduire des questions précédentes le signe de g(x) en fonction des valeurs de x.

__**Partie B:**__

Soit f la définie sur $\mathbb{R}$ par : f(x) = $-x + (x + 2)e^x$

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le repère orthogonal (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) (Unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées)

1. a. Déterminer la limite de f en -∞.

b. Montrer que la droite d'équation y = -x est __asymptote__ à courbe (C_f) en -∞.

c. Étudier, en fonction des valeurs de x, les positions relatives de (D) et C_f

2. En remarquant que *f(x)* peut s'écrire

$$f(x) = e^x\left[\frac{-x}{e^x} + (x + 2)\right]$$

déterminer la limite de *f* en + ∞.

3. Vérifier que pour tout réel, on a *f'(x) = g(x)*

4. Dresser le tableau de variation de *f*.

5. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) en son point A d'abscisse 0.

6. Déterminer, , une valeur approchée de α à 10^{-2} près, puis une valeur approchée de f(α) à 10^{-2} près.

7. Tracer, dans le repère (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$)? la courbe (C_f), la tangente (T) et l'asymptote (D).

Partie C.

1. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par H(x) =(x + 1)e^x. Calculer H'(x) puis en déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer en cm² , l'aire A comprise entre la courbe (C_f) , l'axe des abscisses , la droite d'équation y = -2 et l'axe des ordonnées. On donnera la valeur approchée à 10^{-2} près.

Correction

Partie A :

1.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x+3) = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} e^x(x+3) = +\infty \\ \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (-1) = -1\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$g(x) = e^x(x+3) - 1 = xe^x + 3e^x - 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 3e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (-1) = -1\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$$

Remarque : la courbe représentative de g

admet la droite d'équation $y = -1$ comme asymptote

2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$g'(x) = e^x(x+3) + e^x$$

$$= e^x(x+3+1)$$

$$= e^x(x+4)$$

$e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc *g'(x)* est du signe de *x + 4*

On en déduit les variations de g

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	
g (x)	-1	$\searrow$	$-e^{-4} - 1$	$\nearrow$	$+\infty$

g(-4) = e^{-4}(- 4 + 3) -1 = -e^{-4} -1

3.

g(0) = e^0(0 + 3) -1 = 3 - 1 = 2

- La fonction *g* est dérivable sur *[-4 ; 0]*
- *g'(x) > 0* pour tout réel *x* de l'intervalle *]-4 ; 0[*
- $0 \in [g(-4) ; g(0)] = [-e^{-4} -1 ; 2]$

donc l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α sur l'intervalle *[-4 ; 0]*

4.

x	$-\infty$		-4		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$			
$g(x)$	-1	$\searrow$	$-e^{-4}-1$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

pour $x \in]-\infty ; \alpha]$, $g(x) \leq 0$

pour $x \in [\alpha ; +\infty [$, $g(x) \geq 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B.

1.a

$$f(x) = -x + (x+2)e^x = -x + xe^x + 2e^x$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to -\infty} 2e^x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$$

1.b

$$f(x) - (-x) = -x + xe^x + 2e^x + x$$

$$= xe^x + 2e^x$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} xe^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to -\infty} 2e^x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to -\infty} \left[f(x) - (-x)\right] = 0$$

donc la droite d'équation y = -x est asymptote à courbe (C_f) en $-\infty$.

1.c.

$f(x) - (-x) = (x + 2)e^x$ est du signe de $(x + 2)$

- si $x \leq -2$, la courbe C_f est au dessous de la droite d'équation D : y = - x .
- si $x \geq -2$, la courbe C_f est au dessus de la droite d'équation D : y = - x

2. L'expression

$$f(x) = e^x\left[\frac{-x}{e^x} + (x+2)\right]$$

est obtenue en mettant e^x en facteur dans *f(x).*

$$f(x) = e^{x}\left[\frac{-x}{e^{x}} + (x+2)\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{e^{x}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x+2) = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x}{e^{x}} + (x+2)\right] = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{-x}{e^{x}} + (x+2)\right] = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + e^{x} + (x+2)e^{x} \\ &= -1 + (x+2+1)e^{x} \\ &= -1 + (x+3)e^{x} \\ &= (x+3)e^{x} - 1 = g(x) \end{aligned}$$

4. On a déterminer le signe de g(x) à la question 4 de la partie A, on peut donc en déduire les variations de f et dresser le tableau de variation de f.

- sur $]-\infty; \alpha]$ $f'(x) < 0$ et f est décroissante
- sur $[\alpha ; +\infty[$ $f'(x) > 0$ et f est croissante

f atteint son minimum en α.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$f(\alpha)$	↗	

5. $f'(0) = g(0) = 2$ d'après la question 3 de la partie A

$f(0) = -0 + (0+2)e^{0} = 2$

l'équation de la tangente au point A d'abscisse 0 :

$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$y - 2 = 2x$

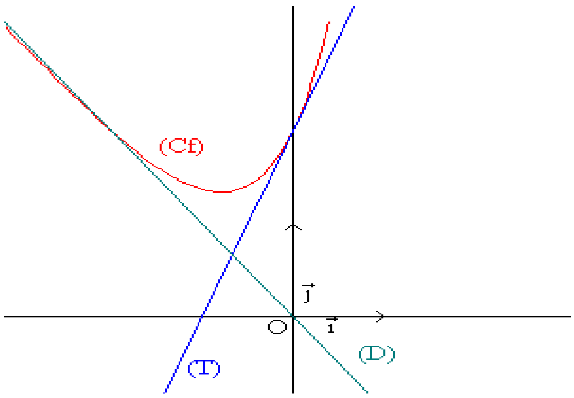
$y = 2x + 2$.

6. On peut utiliser la méthode de dichotomie que l'on peut programmer sur calculatrice graphique. On trouve ainsi

$f(-0,80) < 0$ et $f(-0,79) > 0$ donc une valeur approchée de α à 10^{-2} près est $\alpha \approx -0,79$.

Valeur approchée de $f(\alpha) \approx 1,34$ (pour trouver cette valeur sur la calculatrice on est obliger de laisser les deux fonctions f et g dans le même tableau).

7.



Partie C.

1. La fonction H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$H'(x) = e^x + (x + 1)e^x = e^x (x + 1 + 1) = e^x(x + 2)$
donc la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x(x + 2)$ admet H comme primitive sur $\mathbb{R}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$, soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$:
$f(x) = -x + e^x(x + 2)$
$F(x) = -x^2/2 + (x + 1)e^x$

2. L'unité d'aire en cm² est de 6 cm².
Sur l'intervalle [-2 ; 0] , C_f est au dessus de l'axe des abscisses (minimum > 0) donc l'aire est égale en unité d'aire à :

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx = \left[-\frac{x^2}{2} + (x+1)e^x \right]_{-2}^{0}$$

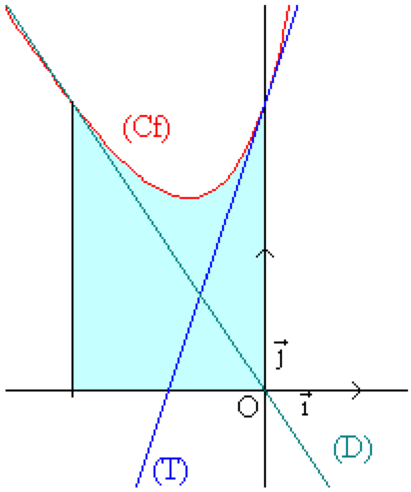
$$= \left(-\frac{0^2}{2} + (0+1)e^0 \right) - \left(-\frac{(-2)^2}{2} + (-2+1)e^{-2} \right)$$

$$= 1 - \left(-2 - 1e^{-2} \right)$$

$$= 1 + 2 + e^{-2}$$

$$= 3 + e^{-2}$$

$A = 6(3 + e^{-2})$ cm² $\approx 18{,}81$cm²



Exercice 40

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 2cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).
Soit la f fonction définie sur]- ∞ ; + ∞[par :
$f(x) = 3e^{-x} + 2x - 4$

Partie A - Construction de la courbe représentative de f

1. a. Déterminer la limite de f en + ∞ .
b. Vérifier que $f(x) = e^{-x} (3 + 2xe^x - 4 e^x)$
Déterminer alors la limite de f en -∞ .
*c.*Soit C la courbe représentative de f et soit D la droite d'équation :
y = 2x - 4.
Montrer que D est asymptote à C en + ∞ et étudier la position relative de la droite D par

rapport à courbe C.
2. a Calculer la dérivée de f. Résoudre l'inéquation d'inconnue réelle x :
$-3e^{-x} + 2 \geq 0$.
b. Dresser le tableau de variation de f.
c. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.
d. Déterminer les valeurs exactes du minimum et du maximum de la fonction f sur l'intervalle [-2 ; 5]
3. Tracer C, D et T dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, pour x variant de -2 à 5 (sur papier millimétré)

Partie B - Calcul d'une aire

1. Chercher une primitive de f sur $]-\infty ; +\infty[$.
2. a. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet sur]1 ; 2[une unique solution α dont on donnera une valeur approchée au dixième près.
b. Préciser, en le justifiant, le signe de f(x) sur l'intervalle $]\alpha ; +\infty[$.
c. Calculer, en cm², l'aire du domaine plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation
$x = \alpha$ et x = 4.
En donner une valeur approchée, en utilisant pour α la valeur approchée trouvée précédemment.

Correction

Partie A :

1. a.

$$f(x) = 3e^{-x} + 2x - 4$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 4 = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

1. b.

$$f(x) = 3e^{-x} + 2x - 4 = e^{-x}\left(3 + 2xe^{x} - 4e^{x}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -4e^{x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} \left(3 + 2xe^{x} - 4e^{x}\right) = 3 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

1.c.

$$f(x) - (2x - 4) = e^{-x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (2x - 4) = 0$$

donc la droite d'équation y = 2x - 4 est asymptote à la courbe C en $+\infty$.
f(x) - (2x - 4) > 0 donc la courbe C est au dessus de la droite D.

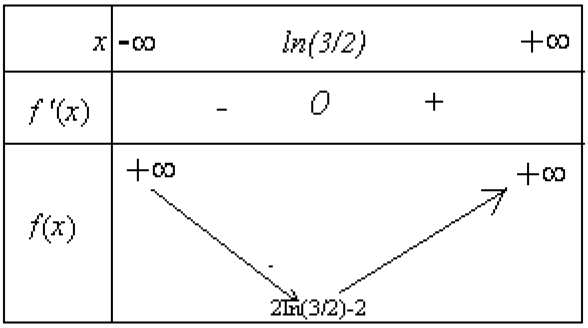
2. a .

$f(x) = 3e^{-x} + 2x - 4$

$f'(x) = -3e^{-x} + 2$

$-3e^{-x} + 2 > 0 \Leftrightarrow -3e^{-x} > -2 \Leftrightarrow e^{-x} < \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow -x < \ln\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x > \ln\dfrac{3}{2}$

2. b.



$f(\ln\dfrac{3}{2}) = 3e^{-\ln\frac{3}{2}} + 2\ln\dfrac{3}{2} - 4 = 3e^{\ln\frac{2}{3}} + 2\ln\dfrac{3}{2} - 4 = 3\times\dfrac{2}{3} + 2\ln\dfrac{3}{2} - 4 = 2\ln\dfrac{3}{2} - 2$

2.c.

Equation de la tangente au point d'abscisse 0 :

$f'(0) = -3 + 2 = -1$

$f(0) = 3 - 4 = -1$

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = -x - 1$

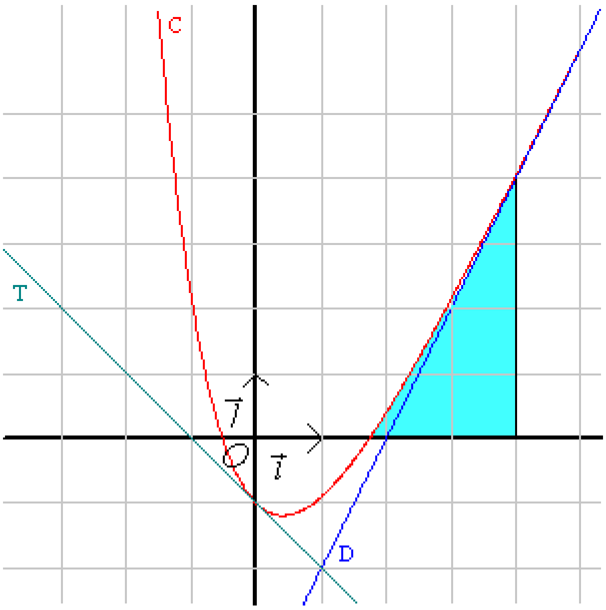
2.d.

$f(-2) = 3e^{2} + 2\times(-2) - 4 = 3e^{2} - 8 = 14$ est le maximum sur $[-2;5]$

$f(5) = 3e^{-5} + 2\times 5 - 4 = 3e^{-5} + 6 = 6$

$f(\ln\dfrac{3}{2}) = 2\ln\dfrac{3}{2} - 2 = -1,19$ est le minimum sur $[-2;5]$

3.



Partie B :

1.

$$f(x) = 3e^{-x} + 2x - 4$$

$$F(x) = -3e^{-x} + x^2 - 4x$$

2. a
f'(x) > 0 sur]1 ; 2[donc :
sur l'intervalle [1 ; 2] f est strictement croissante, de plus

$$f(1) = 3e^{-1} + 2 - 4 = \frac{3}{e} - 2 < 0$$

$$f(2) = 3e^{-2} + 4 - 4 = 3e^{-2} > 0$$

$$donc \quad 0 \in \left[f(1); f(2)\right]$$

par conséquent l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α telle que :
$1 < \alpha < 2$.
f(1,7) < 0 et f(1,8) > 0 donc 1,7 est une valeur approchée de α à 0,1 près par défaut.
2 b. sur l'intervalle] α ; $+\infty$ [la fonction f est strictement croissante, donc pour tout réel x > α on a f(x) > f(α) donc f(x) > 0.
2. c.

$$\int_{\alpha}^{4} f(x)dx = \left[F(x)\right]_{\alpha}^{4} = \left[-3e^{-x} + x^2 - 4x\right]_{\alpha}^{4}$$

$$= \left[\left(-3e^{-4} + 16 - 16\right) - \left(-3e^{-\alpha} + \alpha^2 - 4\alpha\right)\right]$$

$$= -3e^{-4} + 3e^{-\alpha} - \alpha^2 + 4\alpha = 4,4 \text{ u.a} = 4,4 \times 2cm^2 = 8,8 \text{ cm}^2$$

Exercice 41

Dans ce problème :

- I désigne l'intervalle]0 ; + ∞[
- f désigne la fonction définie, pour tout x de l'intervalle]0 ; + ∞[, par :

  $$f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 1}$$

- f ' désigne la fonction dérivée de la fonction f;
- C_f désigne la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal (Ox, Oy) d'unité graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A
1.a. Vérifier que, pour tout x de l'intervalle I :

$$f(x) = e^x + 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

b. Déterminer la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$, et la limite quand x tend vers 0.
En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe C_f
2. a. Vérifier que pour tout x de l'intervalle I :

$$f'(x) = \frac{e^{2x}(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2}$$

b. Étudier, pour tout x de l'intervalle I , le signe de f'(x) .
En déduire le sens de variation de la fonction f et que, pour tout x de l'intervalle I, f(x) > 0.

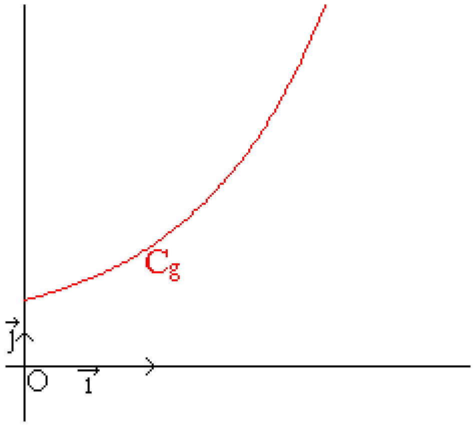
3. a. Résoudre, dans l'intervalle I,
l'équation d'inconnue x, $f(x) = 9/2$.
b. Déduire, du résultat obtenu à la question précédente, les coordonnées des points A et B, points d'intersection de la courbe C_f et de la droite dont une équation est $y = 9/2$.
(A est le point d'intersection dont l'abscisse est la plus petite.)

Partie B

Soit la fonction g définie pour tout x de l'intervalle I, par :
$g(x) = e^x + 1$.
On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté au repère (Ox, Oy).
C_g est donnée sur le graphique ci-après.
On note h la fonction définie , pour tout x de l'intervalle I, par:
$h(x) = f(x) - g(x)$.
1. a. Étudier, pour tout x de l'intervalle I, le signe de h(x) ; en déduire la position de C_f par rapport à la courbe C_g.
b. Résoudre dans l'intervalle I, l'inéquation $h(x) \leq 0{,}05$.
On admet que deux points du plan de même abscisse sont indiscernables sur un dessin dès que la différence de leurs ordonnées a une valeur absolue inférieure à 0,05.
Déterminer un demi-plan dans lequel les courbes C_f et C_g sont indiscernables.
c. Tracer, avec soin, la courbe C_f sur le graphique ci-après.
2. Montrer que, pour tout x de I :

$$h(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} - 1$$

en déduire une fonction primitive de h sur I.



3. Calculer l'aire S de la partie du plan délimitée par la courbe C_f, la courbe C_g et les droite d'équation
$x = \ln 2$ et $x = \ln 3$. (Exprimer le résultat en cm²)

Correction

Partie A

1.a. Cela correspond à démontrer une égalité. Pour tout x de l'intervalle I :

$$e^x + 1 + \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^x + 1}{1} + \frac{1}{e^x - 1} =$$

$$\frac{(e^x + 1)(e^x - 1)}{(e^x - 1)} + \frac{1}{e^x - 1} =$$

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} + \frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{2x}}{e^x - 1} = f(x)$$

donc

$$f(x) = e^x + 1 + \frac{1}{e^x - 1}$$

1.b

$$\lim_{x \to +\infty} (e^x - 1) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x - 1} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (e^x + 1) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left[e^x + 1 + \frac{1}{e^x - 1} \right] = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Si $x > 0$ alors $e^x > 1$, d'ou $e^x - 1 > 0$ par conséquent :

$$\lim_{x \to 0^+} (e^x - 1) = 0^+$$

on en déduit :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{e^x - 1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (e^x + 1) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \left[e^x + 1 + \frac{1}{e^x - 1} \right] = \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

par définition la droite d'équation x = 0 (axe des ordonnées) est asymptote à la courbe C_f (asymptote verticale)

2.a. f est dérivable sur I et :

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 1}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^x - 1) - e^{2x} \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} =$$

$$\frac{e^{2x}(2e^x - 2 - e^x)}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^{2x}(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2}$$

Remarque : on a utiliser la formule suivante pour dérivée

$$f = \frac{u}{v}$$

$$f' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$$

b. Le signe de f'(x) ne dépend que du signe de $e^x - 2$, puisque les expression e^{2x} et $(e^x - 1)$ sont toujours strictement positives sur I.

Étudions le signe de $e^x - 2$

$e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow \ln e^x > \ln 2$ (car la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$)

$\Leftrightarrow x > \ln 2$

donc f est décroissante sur]0 ; ln2] et elle est croissante sur

[ln2 ; + ∞ [.

$$f(\ln 2) = \frac{e^{2\ln 2}}{e^{\ln 2} - 1} = \frac{2^2}{2-1} = 4$$

f admet sur I un minimum absolu en ln 2 , ce minimum est 4, donc pour tout x de l'intervalle I, $f(x) \geq 4 > 0$.

3.a.

$$f(x) = \frac{9}{2}$$

$$\frac{e^{2x}}{e^x - 1} = \frac{9}{2}$$

$$2e^{2x} = 9e^x - 9$$

$$2e^{2x} - 9e^x + 9 = 0$$

Pour résoudre cette dernière équation, posons $X = e^x$

on a $X^2 = e^{2x}$ et X est un nombre strictement positif puisque

$e^x > 0$.

$2X^2 - 9X + 9 = 0$

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 9 = 81 - 72 = 9 > 0$$

donc 2 solutions réelles distinctes

pour l'équation $2X^2 - 9X + 9 = 0$

$$X_1 = \frac{9 - \sqrt{9}}{4} = \frac{9-3}{4} = \frac{3}{2}$$

$$X_2 = \frac{9 + \sqrt{9}}{4} = \frac{9+3}{4} = 3$$

Ces deux solutions pour X sont acceptable puisque strictement positives

en reprenant $X = e^x$

on a donc $e^x = 3$ ou $e^x = 3/2$

d'ou x = ln3 ou x = ln(3/2)

S = {ln3; ln(3/2)}

3. b. Il s'agit d'interprétation graphique les solutions de l'équation f(x) = 9/2 sont les abscisses des points d'intersections de C_f avec la droite d'équation réduite y = 9/2, on a trouvé ln (3/2) et ln3 comme solution pour l'équation f(x) = 9/2, donc A et B sont les points

A(ln(3/2) ; 9/2) , B(ln3 ; 9/2).µ

Partie B

1.a

$h(x) = f(x) - g(x)$

$= e^x + 1 + \dfrac{1}{e^x - 1} - (e^x + 1) = \dfrac{1}{e^x - 1}$

Étudions le signe de h(x) sur I :

sur I, e^x - 1> 0, donc h(x) > 0.

On en déduit que la courbe représentative de f est au dessus (strictement au dessus) de la courbe représentative de g.

1.b.

$h(x) \leq 0,05$

$0 < \dfrac{1}{e^x - 1} \leq 0,05$

$e^x - 1 \geq \dfrac{1}{0,05}$

$e^x - 1 \geq 20$

$e^x \geq 21$

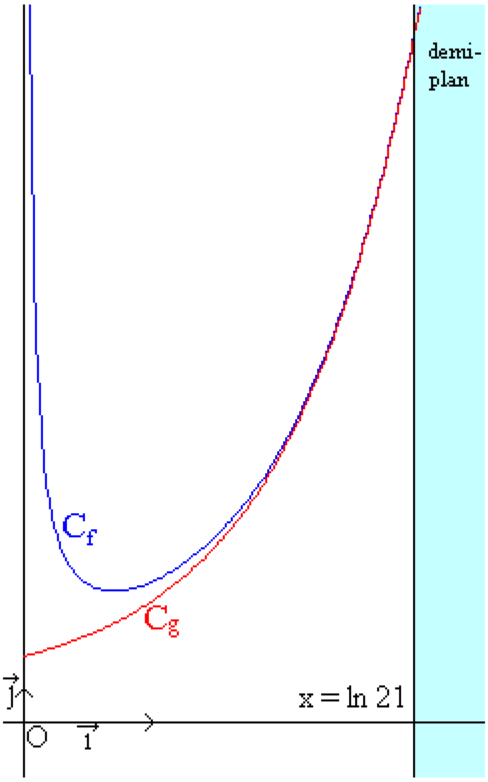
$x \geq \ln 21$

(Pour résoudre cette inéquation, on utilise le théorème de rangement des inverses et des logarithmes.)

Le demi-plan dans lequel les courbes C_f et C_g sont indiscernables est le demi-plan caractérisé par l'inéquation

x ≥ln 21.

c.



2. Pour tout réel x de I on a :

$$\frac{e^x}{e^x-1}-1=\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{e^x-1}{e^x-1}$$
$$=\frac{e^x-e^x+1}{e^x-1}=\frac{1}{e^x-1}=h(x)$$

(voir comment démontrer une égalité)

L'expression qui suit est de la forme u'/u avec *u(x) =* e^x *- 1* et *u'(x) =* e^x *avec u> 0 sur I*

$$\frac{e^x}{e^x-1}$$

On sait que une primitive d'une telle fonction est ln |u|

Soit H une primitive de h sur I , on a alors :

$$h(x)=\frac{e^x}{e^x-1}-1$$
$$H(x)=\ln(e^x-1)-x$$

3. On sait que la courbe représentative de f est au dessus (strictement au dessus) de la courbe représentative de g sur I

donc l'aire de la partie du plan est égale en unité d'aire à :

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3}[f(x)-g(x)]dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}h(x)dx=[H(x)]_{\ln 2}^{\ln 3}$$
$$=H(\ln 3)-H(\ln 2)$$
$$=\ln(e^{\ln 3}-1)-\ln 3-\ln(e^{\ln 2}-1)+\ln 2$$
$$=\ln(3-1)-\ln 3-\ln(2-1)+\ln 2$$
$$=\ln 2-\ln 3-\ln 1+\ln 2$$
$$=2\ln 2-\ln 3$$
$$=\ln\frac{4}{3}$$

Soit A l'aire de partie du plan définie dans l'énoncé, l'unité d'aire étant 4 cm² , A = 4 ln(4/3) cm²