LOGARITHME NÉPÉRIEN ET FONCTION COMPOSÉE

Enoncée

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer la fonction dérivée f' de f.

2. On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\ln x}{(\ln x)^2+\ln x+1}$ et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unités graphiques 1 cm.

a. Exprimer g en fonction de f et préciser l'ensemble de définition de g.

b. Déterminer la fonction dérivée g' de g (on pourra utiliser la question 1.).

c. Etudier le signe de g'.

d. Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.

e. Dresser le tableau des variations de g.

f. Construire la courbe Γ en précisant la tangente au point d'abscisse 1.

Correction

1. f est un quotient de fonctions dérivables et le dénominateur ne s'annule pas, elle est donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{x^2+x+1-x(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{-x^2+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

2. a. $g(x)=\dfrac{\ln x}{\ln^2 x+\ln x+1}=f(\ln x)$ donc, comme f est définie sur $\mathbb{R}$, g est définie sur $]0\,;+\infty[$.

b. $(f\circ g)'=g'\times(f'\circ g)$. $g'(x)=\dfrac{1}{x}f'(\ln x)=\dfrac{1}{x}\left[\dfrac{-\ln^2 x+1}{\left(\ln^2 x+\ln x+1\right)}\right]$.

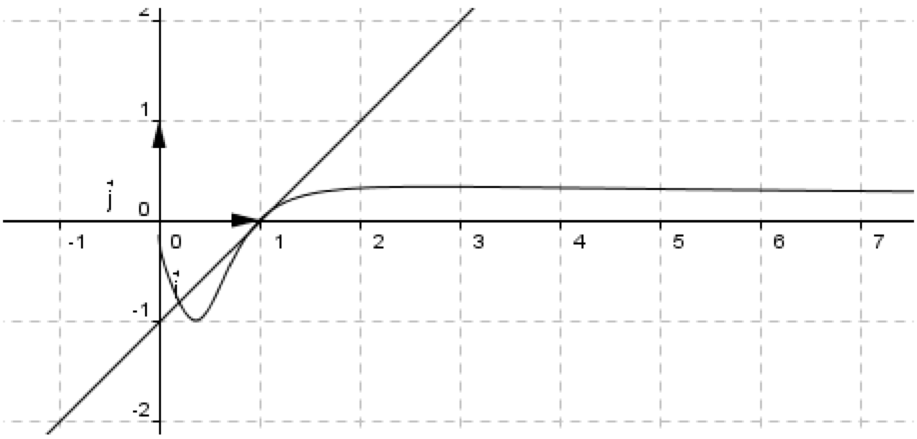
c. Le signe de g' dépend de celui de $1-\ln^2 x=(1-\ln x)(1+\ln x)$.

x	0		$1/e$		e		$+\infty$
$1-\ln x$	||	$+$		$+$	0	$-$	
$1+\ln x$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	|| 0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

d. En $+\infty$ g se comporte comme les termes de plus haut degré en ln, soit

$\frac{\ln x}{\ln^2 x}=\frac{1}{\ln x}\to\frac{1}{+\infty}=0$; en 0 c'est pareil car ln x tend vers $-\infty$, donc encore 0 comme limite.

f. Tangente au point d'abscisse 1 : $y=x-1$.



http://afimath.jimdo.com/