EXERCICE N°1

Résoudre dans N^2 les systèmes suivants :

$S_1 : \begin{cases} x + 2y = 132 \\ x \wedge y = 11 \end{cases}$, $S_2 : \begin{cases} xy = 1694 \\ x \vee y = 154 \end{cases}$ $S_3 : \{x + y = xy$

EXERCICE N°2

1°)Décomposer 319 en facteurs premiers.
2°)Démontrer que si x et y sont deux entiers naturels premiers entre eux, il en est de même pour les nombres $3x + 5y$ et $x + 2y$.
3°)Résoudre dans N^2 le système d'inconnues a et b : $\begin{cases} (3a+5b)(a+2b) = 1276 \\ ab = 2m \end{cases}$ *où m est le PPCM de a et b.*

EXERCICE N°3

1°) Quel est le reste de la division par 5 du nombre 24^{40}
2°) Déterminer le chiffre des unités de l'écriture décimale de l'entier 7^{77} .

EXERCICE N°4

1°) Démontrer que, pour que la relation suivante $\frac{x}{9} - \frac{y}{4} = 3$ soit satisfaite pour x et y entiers naturels, il faut prendre x et y de la forme :$x = 9(k + 3)$ et $y = 4k$ avec k entier naturel.

Dans la suite de l'exercice k est un entier naturel non nul.

2°) Démontrer que le PGCD de x et de y ne peut être qu'un diviseur de 108.

3°) Démontrer que le PPCM de x et de y ne peut être qu'un multiple de 36.

4°) On pose m = PPCM(x ; y) et d = PGCD(x ; y). Déterminer, s'il existe, le plus petit entier k pour que :
a) d soit divisible par 4 ?
b) d soit divisible par 5 ?
c) m soit divisible par 72 ?
m soit divisible par 216 ?

EXERCICE N°5

1°)On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où (x ; y) est un couple de nombres entiers relatifs.

a) Donner une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E).

2°)Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple (a ; b) de nombres entiers vérifiant : $\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2. \end{cases}$

a) Montrer que le couple (a ;- b) est solution de (E).

b) Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?

3°)a) Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où (x ; y) est un couple de nombres entiers relatifs.

b) Au 8e siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

EXERCICE N°6

On se propose de déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x,y) \in N \times N$, solutions de l'équation :
$(E) : 2^x - 3^y = 1$
1°) Soit $k \in N$.
a) Quel est le reste de la division euclidienne de 9^k par 8 ?
b) Déterminer les restes de la division euclidienne de $3^{2k} + 1$ par 8, puis de $3^{2k+1} + 1$ par 8.

2°) Soit $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, un couple solution de l'équation (E). Montrer, à l'aide de 1°) que $x \le 2$.
3°) En déduire tous les couples $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, solutions de l'équation (E).

EXERCICE N°7

1°) On considère l'équation (E) : $17x - 6y = 2$, où x et y sont des entiers.
- *a) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $17x = 6y$.*
- *b) Déterminer une solution particulière de (E).*
- *c) En déduire tous les couples de $\mathbb{Z}^2$ solutions de l'équation (E).*
- *d) Montrer que le PGCD des couples solutions de (E) est 1 ou 2.*
- *e) Déterminer les couples (x ; y) de $\mathbb{Z}^2$ solutions de (E) dont le PGCD est 2.*
- *f) Déterminer le couple $(x_0 ; y_0)$ solution de (E) tel que : $x_0 \wedge y_0 = 2$ et $100 \le y_0 \le 150$*

2°) Une bande de 17 pirates s'est emparé d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager équitablement et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors 3 pièces. Mais leur bateau fait naufrage et seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés : le partage laisserait alors 5 pièces d'or au cuisinier.
- *a) On note N le nombre de pièces d'or du butin, x le nombre de pièces de chaque pirate avant le naufrage et y le nombre de pièces d'or de chaque pirate après le naufrage. Exprimer N en fonction de x, puis en fonction de y.*
- *b) Ecrire alors la relation liant x et y.*
- *c) En utilisant les résultats de la question 1°c), déterminer la fortune minimale que peut espérer le cuisinier quand il décide d'empoisonner le reste des pirates avec du civet de rat.*
- *d) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 2x - 8y = 5$.*

EXERCICE N°8

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier.
On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.
1°) Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
2°) Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.
3°) Quelle est la parité de p et de q ?

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier.
On se propose de chercher des couples d'entiers naturels (a; b) vérifiant la relation :(E) : $a^2 - 250\,507 = b^2$.
1°) Soit X un entier naturel.
- *a) Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.*
- *b) Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles modulo 9 de a^2.*
- *c) Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.*

2°) Justifier que si le couple (a; b) vérifie la relation (E), alors $a \ge 501$.
Montrer qu'il n'existe pas de solution du type (501; b).
3°) On suppose que le couple (a; b) vérifie la relation (E).
- *a) Démontrer que a est congru à 503 ou 505 modulo 9.*
- *b) Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple (505 + 9k; b) soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.*

Partie C

1°) Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit de deux facteurs.
2°) Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?
3°) Cette écriture est-elle unique ?

Exercice

1°) On considère l'équation (E) : $9x - 7y = 1$ avec $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$.
a) Déterminer une solution particulière de (E)
b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.
2°) Déterminer les entiers naturels du système décimal inférieurs à 200 qui s'écrivent :
$\overline{92}$ dans le système à base a.
$\overline{73}$ dans le système à base b.

EXERCICE N°9

1°) Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 1771 et de 2001, en déduire leur PGCD.
2°) Soit l'équation d'inconnue (x, y) élément de $\mathbb{Z}^2$:(E) : $1771x - 2001y = 92$
- *a) En appliquant l'algorithme d'Euclide aux nombres 77 et 87, déterminer une solution particulière de l'équation (E') : $77x - 87y = 1$.*
- *b) En déduire une solution particulière de (E) puis résoudre (E).*

3°) a) On considère deux suites arithmétiques (u_n) et (v_n) définies par :
$u_0 = 100$, $v_0 = 8$et pour tout n entier par :$u_{n+1} = u_n + 2001$ et $v_{n+1} = v_n + 1771$.
Indiquer tous les couples (p ; q) avec p et q entiers naturels inférieurs à 500 tels que $u_p = v_q$.
b) Reprendre la question précédente avec $u_0 = 100$ et $v_0 = 75$.

EXERCICE N°10

1°)a) Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $7u - 13v = 1$.
b) En déduire deux entiers relatifs u_0 et v_0 tels que $14u_0 - 26v_0 = 4$.
c) Déterminer tous les couples (a, k) d'entiers relatifs tels que $14a - 26k = 4$.
2°) On considère deux entiers naturels a et b. Pour tout entier n, on note $\varphi(n)$ le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26.
On décide de coder un message, en procédant comme suit :
A chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25, selon le tableau :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Nombre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Pour chaque lettre α du message, on détermine l'entier n associe puis on calcule $\varphi(n)$. La lettre α est alors codée par la lettre associée à $\varphi(n)$.
On ne connait pas les entiers a et b, mais on sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.
a) Montrer que les entiers a et b sont tels que : $\begin{cases} 5a + b \equiv 10[26] \\ 19a + b \equiv 14[26] \end{cases}$
b) En déduire qu'il existe un entier k tel que $14a - 26k = 4$.
c) Déterminer tous les couples d'entiers (a, b), avec $0 \le a \le 25$ et $0 \le b \le 25$ tels que $\begin{cases} 5a + b \equiv 10[26] \\ 19a + b \equiv 14[26] \end{cases}$
3°) On suppose que a = 17 et b = 3.
a) Coder le message « GAUSS ».
b) Soit n et p deux entiers naturels quelconques. Montrer que, si $\varphi(n) = \varphi(p)$, alors $17(n - p) \equiv 0[26]$
En déduire que deux lettres distinctes de l'alphabet sont codées par deux lettres distinctes.
4°) On suppose que a = 17 et b = 3.
a) Soit n un entier naturel.
Calculer le reste de la division euclidienne de $23\varphi(n) + 9 - n$ par 26
b) En déduire un procède de décodage.
c) En déduire le décodage du message « KTGZDO ».

EXERCICE N°11

1°) a est un entier naturel. Montrez que $a^5 - a$ est divisible par 10.
2°) a et b sont des entiers naturels avec $a \ge b$. Démontrez que si $a^5 - b^5$est divisible par 10 alors $a^2 - b^2$ est divisible par 20.

EXERCICE N°12

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres :$a = n^3 - n^2 - 12n$ et $b = 2n^2 - 7n - 4$.
1°)Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par n-4.
2°)On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le PGCD de α et β.
a)Établir une relation entre α et β indépendante de n.
b)Démontrer que d est un diviseur de 5.
c)Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si n - 2 est multiple de 5.
3)Montrer que 2n + 1 et n sont premiers entre eux.
4°)a)Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n le PGCD de a et b.
b°)Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers n = 11 et n = 12.

EXERCICE N°13

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers strictement positifs.
1Démontrer que si $(a^2 + a\,b - b^2)^2 = 1$, alors a et b sont premiers entre eux.
2° On se propose de déterminer les couples d'entiers strictement positifs (a ; b) tels que : $(a^2 + a\,b - b^2)^2 = 1$. Un tel couple sera appelé solution.
a) Déterminer a lorsque a = b.
b) Vérifier que (1 ; 1), (2 ; 3) et (5 ; 8) sont trois solutions particulières.
c) Montrer que si (a ; b) est solution et si $a \ne b$, alors $a^2 - b^2 < 0$.

3° a) Montrer que si (x ; y) est une solution différente de (1 ; 1) alors (y – x ; x) et (y ; y + x) sont aussi des solutions.
b) Déduire de 2° b) trois nouvelles solutions.
4° On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_n$ *définie par* $a_0 = a_1 = 1$ *et pour tout entier n,* $n > 0$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
Démontrer que pour tout entier n > 0, $(a_n ; a_{n+1})$ *est solution.*
En déduire que les nombres a_n *et* a_{n+1} *sont premiers entre eux.*

EXERCICE N°14

1°) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $2^{3n} - 1$ *est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).*

En déduire que $2^{3n+1} - 2$ *est un multiple de 7 et que* $2^{3n+2} - 4$ *est un multiple de 7.*

2°)Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3°)Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.

a) Si p = 3n, quel est le reste de la division de A_p *par 7 ?*

b) Démontrer que si p = 3n + 1 alors A_p *est divisible par 7.*

c) Étudier le cas où p = 3n + 2.

4°)On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire : $a = \overline{1001001000}$ $b = \overline{1000100010\,000}$ *.Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme* A_p. *Sont-ils divisibles par 7 ?*