Intégrales

Exercice 1 : Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$ on pose : $U_n = \int_0^1 \sqrt[3]{1-x^n}\,dx$.

1. Calculer U_1.
2. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente.
3. Montrer que pour tout X appartenant à [0 ; 1], on a : $1-X \le \sqrt[3]{1-X} \le 1-\frac{1}{3}X$.
4. En déduire un encadrement de U_n et la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$

Exercice 2 : Soit (S_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = 1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\dots\dots\dots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \le \int_n^{n+1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.
2. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $\int_1^n \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \le S_n \le 1+\int_1^n\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{S_n}{\sqrt[3]{n^2}}$.

Exercice 3 : Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}I_n$.
2. En déduire pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
3. Exprimer en fonction de n la somme $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}C_n^k$

Exercice 4 :

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_a^b (x-a)^n\sqrt{b-x}\,dx$, $0 \prec a \prec b$.

1. Calculer I_1.
2. Trouver une relation entre I_n et I_{n+1} pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
3. Montrer que pour tout $\in\mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{2^{2n+2}(n+1)!n!}{(2n+3)!}(b-a)^{n+1}\sqrt{b-a}$.

Exercice 5 : Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $I_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,dt$.

1. Calculer I_1.
2. a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $I_n \ge 0$.
   b. Montrer que (I_n) est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.
   c. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{\sqrt{2}}{n+1}$.En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. a. Montrer que pour tout $t\in[0,1]$, $0 \le \sqrt{2}-\sqrt{1+t} \le \frac{1}{2}(1-t)$.
   b. En déduire que $\frac{\sqrt{2}}{n+1}-\frac{1}{2n^2} \le I_n \le \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.