INTÉGRALES

Exercice n°1:

Soit F la fonction définie sur IR par: $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

1) Calculer $F'(x)$ pour tout $x \in IR$.
2) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = F(x) + F(-x)$ Calculer $g'(x)$ et déduire que F est impaire.
3) Soit la fonction h définie sur $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par: $h(x) = F(\mathrm{tg}\, x)$
   a) Montrer que h est dérivable sur IR et que $h'(x) = 1$.
   b) Déduire que $h(x) = x$ pour tout $x \in$IR. Puis calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

Exercice n°2:

Pour tout n$\in$IN*, Soit $I_n = \int_0^1 tg^n(\frac{\pi}{4}x)dx$

1) Montrer que $\forall n \in$IN*, on a: $I_n \geq 0$.
2) a) Calculer I_2 .
   b) Montrer que $I_n + I_{n+2} = \frac{4}{\pi(n+1)}$ $\forall n \in$IN*.
   c) Déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{4}{\pi(n+1)}$ $\forall n \in$IN*.
   d) Calculer la limite de la suite I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n°3:

<u>Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale</u> $\mathcal{A} = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

Soit f la fonction définie sur I= $]0;\frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation sur I.
2) Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J qu'on précisera.
3) On note g la fonction réciproque de f.
   a) Calculer g(2) et g($\sqrt{2}$).
   b) Prouver que g est dérivable sur $]1;+\infty[$ et que $g'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\forall x > 1$.
   c) En déduire la valeur de $\mathcal{A}$.

Exercice n°4:

On considère la fonction f définie sur IR par : f(x)= $\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt$

1) Montrer que f est dérivable sur IR et donner le sens de variation de f
2) Montrer que f est impaire.
3) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$; on a: f(x) $\geq \frac{1}{2}x^2$.

   b) Préciser la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$.
4) Soit la suite réelle I_n définie sur IN par : I_n = $\int_0^1 t^n \sqrt{1+t^2}\,dt$

   a) Calculer I_1 .

   b) Montrer que la suite I_n est décroissante.

   c) Montrer que $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ et calculer la limite de cette suite.

Exercice n°5:

Soit la fonction f définie sur I = (0,1[par f(x)= $-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur]0,1[et que f'(x)= $\frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^3}$.

   b) Etudier les variations de f sur]0,1[.
2) a) Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J qu'on précisera.

   b) Montrer que $f^{-1}(x)= \frac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}$ $\forall\, x \in$J .
3) Soit la fonction φ définie sur I par φ(x) = f(x)-x

   a) Montrer que φ est strictement croissante sur]0,1[et dresser son tableau de variation sur I .

   b) Montrer que l'équation f(x)=x admet une solution unique $\alpha \in]0,8;1[$.

   c) Donner le signe de φ sur I.
4) Construire la courbe (C) de f et la courbe (C') de f^{-1} dans un même R.O.N $(o,\vec{i},\vec{j})$.
5) Soit $\mathcal{A}(\alpha)= \int_0^{\alpha}(x-f(x))dx$ et $\mathcal{B}(\alpha)= \int_{-1}^{\alpha}(f^{-1}(x)-x)dx$.

   a) Interpréter graphiquement $\mathcal{A}(\alpha)$ et $\mathcal{B}(\alpha)$ et déduire que $\mathcal{A}(\alpha)=\mathcal{B}(\alpha)-\frac{1}{2}$. Et calculer $\mathcal{A}(\alpha)$ en fonction de α .