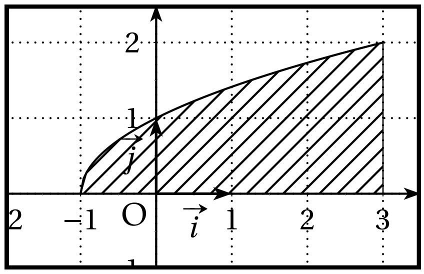
AFIF BEN ISMAIL	**Série Intégrales**	**4M**

Exercice 1:

Cocher la réponse exacte.

1. D'après la représentation graphique ci-contre, l'aire de la partie limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$ est :

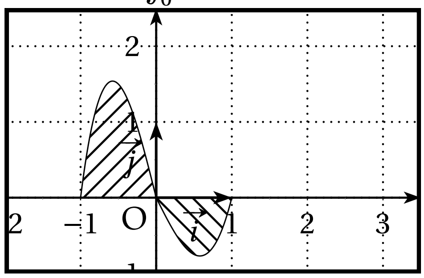


☐ 3 ☐ 8. ☐ 5,33.

2. Parmi ces écritures, une n'a pas de sens, laquelle ?

☐ $\displaystyle\int_0^x tf(x)\,\mathrm{d}t$ ☐ $\displaystyle\int_0^x tf(x)\,\mathrm{d}x.$ ☐ $\displaystyle\int_0^x xf(t)\,\mathrm{d}t.$

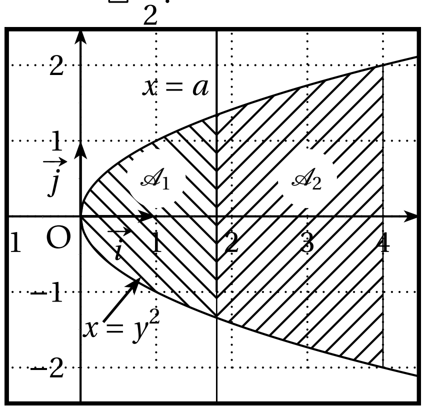
3. D'après la représentation graphique ci-contre, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ est :



☐ $I < 0$ ☐ $I > 0.$ ☐ $I = 0.$

4. Soit $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t,$ alors I est égale à :

☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ π ☐ $\dfrac{\pi}{2}.$



5. Les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égaux si a est égale :

☐ $3/2$ ☐ 2. ☐ $\sqrt[3]{16}.$

Exercice 2:

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^{\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t,\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x,\ \int_0^1 \frac{t-1}{(t+1)^4}\mathrm{d}t,\ \int_0^1 \left(t+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 \mathrm{d}t,\ \int_0^1 \frac{x^3}{(x^4+1)^4}\mathrm{d}x,\ \int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\pi} (\sin x + x\cos x)\,\mathrm{d}x;\ \int_0^{\pi} \sin^3 x\ \mathrm{d}x;\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan x + \tan^3 x\right)\mathrm{d}x;\ \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\frac{1}{\tan^2(x)}\right)\mathrm{d}x.$$

Exercice 3:

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$. On note $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les variations de f et construire $(\mathscr{C}_f)$.

2. a) Montrer que f est une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[1, +\infty[$.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

3. Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $\widehat{AB} = \left\{M(x, y) \text{ tels que } y = f(x) \text{ et } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}\right\}$

4. Déduire l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Exercice 4:

Pour n entier naturel, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}$.

1. Quelle est la signification géométrique de I_0 ? En déduire la valeur de I_0. Calculer I_1.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+4} I_n$.

3. a) Montrer que (I_n) est une suite positive et décroissante.

b) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a : $0 \le I_n \le \dfrac{1}{n+1}$. calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

4. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\dfrac{n+1}{n+4} \le \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$. Trouver la limite de la suite $(\dfrac{I_{n+1}}{I_n})$

b) Montrer que $n(n+1)(n+2)I_n I_{n-1}$ est indépendant de n et calculer sa valeur.

c) En remarquant $n(n+1)(n+2)I_n^2 = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{I_n}{I_{n-1}}$. calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{n} I_n$.

Exercice 5:

Soit f la fonction définie sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. a) Montrer que f est dérivable sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et calculer $f'(x)$.

b) Calculer $f(0)$. En déduire l'expression de $f(x)$ pour $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. Calculer les intégrales suivantes : $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$, $J = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$, $K = \displaystyle\int_0^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$

3. A l'aide d'une intégration par parties calculer l'intégrale suivante $L = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6:

Pour tout entier n, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt$.

1. Soit f_n la fonction définie sur $[0, \dfrac{\pi}{4}]$ par $f_n(x) = \displaystyle\int_0^{\tan x} \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt$.

a) Montrer que f_n est dérivable sur $[0, \dfrac{\pi}{4}]$ et que $f_n'(x) = (\tan x)^{2n}$.

b) En déduire que : $\forall x \in [0, \dfrac{\pi}{4}]$, on a $f_n(x) = \displaystyle\int_0^x (\tan t)^{2n}\,dt$.

c) Calculer $f_0(x)$ et $f_1(x)$.

2. a) Calculer I_0 et I_1.

b) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a : $\frac{t^{2n}}{2} \leq \frac{t^{2n}}{1+t^2} \leq t^{2n}$.

c) En déduire un encadrement de I_n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

d) (I_n) est elle monotone ?

3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_n + I_{n-1} = \frac{1}{2n-1}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{2(2n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(2n-1)}$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

Exercice 7:

Soit p et n sont des entiers naturels On pose :$I_{p,n} = \int_0^1 x^p (1-x)^n \; dx$

1. Calculez et $I_{p,0}$ et $I_{p,1}$.

2. Calculez et $I_{0,n}$ et $I_{1,n}$.

3. Établissez pour $n \geq 1$, la relation : $I_{p,n} = \frac{n}{p+1} I_{p+1,n-1}$.

4. Montrer que $I_{n,n} = \frac{n!}{(n+1)(n+2)\dots(2n+1)}$.

Exercice 8:

Soient I et u les suites définies sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n dt$, $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{I_k}{2^k}$.

1. a) Montrer que I est décroissante. En déduire que la suite I est convergente. notons L sa limite

b) En remarquant que $I_n = \int_0^\alpha \left(1-t^2\right)^n dt + \int_\alpha^1 \left(1-t^2\right)^n dt$, montrer que $\forall \alpha \in]0,1[$ on a : $0 \leq I_n \leq (1-\alpha)\left(1-\alpha^2\right)^n + \alpha$

c) En déduire que $0 \leq L \leq \alpha$ pour tout $\alpha \in]0,1[$. En déduire la valeur de L .

2. a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3} I_n$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $I_n = \frac{2^{2n}.(n!)^2}{(2n+1)!}$

c) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $u_n = 2\int_0^1 \frac{1-(\frac{1-t^2}{2})^{n+1}}{1+t^2} dt$

3. On pose $v_n = 2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt - u_n$ et $f(x) = \int_0^{tgx} \frac{1}{1+t^2} dt$, pour $x \in [0,\pi/4]$

a) Montrer que $x \in [0,\pi/4]$ on a : $f(x) = x$, en déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$

b) Montrer que $\forall t \in [0,1]$ on a : $0 \leq \frac{\left(1-t^2\right)^{n+1}}{1+t^2} \leq 1$, en déduire que $0 \leq v_n \leq \frac{1}{2^n}$

c) En déduire les limites des suites v et u

Exercice 9:

1. Soit f une fonction continue décroissante sur $[0,1]$. On pose $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout k compris entre 0 et $n-1$ on a :
$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$.

b) En déduire que : $u_n \leq \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leq u_n + \frac{1}{n}\left(f(0)-f(1)\right)$. Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

2. Calculer les limites suivantes :
$\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+n)^2}$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n-k}$

Exercice 10:

On pose $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n t\,dt$.

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\frac{\pi}{2}$

2. Montrer que la suite u définie par $u_n = (n+1)I_n I_{n+1}$ est une suite constante, en déduire $I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$

3. a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante .

b) En déduire que pour tout n on a : $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. Trouver la limite de la suite $(\frac{I_{n+1}}{I_n})$

4. a) Vérifier que pour tout $n \geq 1$ on a : $\sqrt{n}\,I_n = \sqrt{u_{n-1}\frac{I_n}{I_{n-1}}}$.

b) En déduire que : $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, calculer alors $\lim_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 11:

On définie la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t\,\mathrm{d}t$

1. a) Calculer I_0 et I_1.

b) Montrer que pour tout entier naturel p, $I_p + I_{p+2} = \frac{1}{p+1}$.

c) En déduire I_2 et I_3.

2. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

3. a) En utilisant 1.(b) et 2., prouver que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$.

b) Déterminer les limites des suites $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier $u_n = I_0 + (-1)^n I_{2n+2}$.

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.