

LOGARITHME NÉPÉRIEN ET FONCTION COMPOSÉE

Enoncée

1. On considère la fonction $f: x \mapsto \frac{x}{x^2+x+1}$. Montrer que f est définie et dérivable sur \mathbb{R} et déterminer la fonction dérivée f' de f .

2. On considère la fonction $g: x \mapsto \frac{\ln x}{(\ln x)^2 + \ln x + 1}$ et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unités graphiques 1 cm.

a. Exprimer g en fonction de f et préciser l'ensemble de définition de g .

b. Déterminer la fonction dérivée g' de g (on pourra utiliser la question 1.).

c. Etudier le signe de g' .

d. Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.

e. Dresser le tableau des variations de g .

f. Construire la courbe Γ en précisant la tangente au point d'abscisse 1.

Correction

1. f est un quotient de fonctions dérivables et le dénominateur ne s'annule pas, elle est donc continue et dérivable sur \mathbb{R} .

$$f'(x) = \frac{x^2+x+1-x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}.$$

2. a. $g(x) = \frac{\ln x}{\ln^2 x + \ln x + 1} = f(\ln x)$ donc, comme f est définie sur \mathbb{R} , g est définie sur $]0; +\infty[$.

$$b. (f \circ g)' = g' \times (f' \circ g). \quad g'(x) = \frac{1}{x} f'(\ln x) = \frac{1}{x} \left[\frac{-\ln^2 x + 1}{(\ln^2 x + \ln x + 1)} \right].$$

c. Le signe de g' dépend de celui de $1 - \ln^2 x = (1 - \ln x)(1 + \ln x)$.

x	0	$1/e$		e	$+\infty$	
$1 - \ln x$		+		+	0	-
$1 + \ln x$		-	0	+		+
$g'(x)$		-	0	+	0	-
$g(x)$		0	-1	$\frac{1}{3}$		0

d. En $+\infty$ g se comporte comme les termes de plus haut degré en \ln , soit

$\frac{\ln x}{\ln^2 x} = \frac{1}{\ln x} \rightarrow \frac{1}{+\infty} = 0$; en 0 c'est pareil car $\ln x$ tend vers $-\infty$, donc encore 0 comme limite.

f. Tangente au point d'abscisse 1 : $y = x - 1$.

