LOGARITHME NÉPÉRIEN ET LIMITES

Exercice

1. Soit $f(x)=\dfrac{\cos(\pi x^2-\frac{\pi}{3})+\frac{1}{2}}{x-1}$; calculer $\lim\limits_{x\to1} f(x)$.

2. $f(x)=\ln\left(\dfrac{ex+3}{x+5}\right)$; calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+3}{e^x}\right)$; calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x+1}{2x}$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

Correction

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos(\pi x^2-\frac{\pi}{3})+\frac{1}{2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$ avec $\begin{cases} f(x)=\cos(\pi x^2-\frac{\pi}{3}) \\ f(1)=\cos(\pi-\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2}\end{cases}$.

On calcule donc $f'(x)=-2\pi x\sin(\pi x^2-\frac{\pi}{3})$ d'où $f'(1)=-2\pi\sin(\pi-\frac{\pi}{3})=-2\pi\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{2\pi\sqrt{3}}{2}=-\pi\sqrt{3}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ex+3}{x+5}=e\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{ex+3}{x+5}\right)=\ln e=1$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x^2+3}{e^x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(x^2+3)-\ln e^x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right))-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln x^2+\ln\left(1+\frac{3}{x^2}\right)-x\right]$,

or $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{3}{x^2}\right)=\ln 1=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x^2-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2\ln x-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(2\frac{\ln x}{x}-1\right)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x+1}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x}=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x}=0$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{X\to0+}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$.