FONCTIONS LOGARITHMES

Ce chapitre traite d'une des plus importantes fonctions en mathématiques, fonction utilisée dans de nombreux domaines scientifiques ou économiques

1) Fonction logarithme népérien

Définition : La fonction logarithme népérien est **LA** primitive de la fonction inverse $x \to \frac{1}{x}$, définie sur $]0;+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 1. Elle se note $\boxed{\ln}$. Les valeurs de cette fonction s'obtiennent par la touche $\boxed{\mathbf{ln}}$ de la calculatrice.

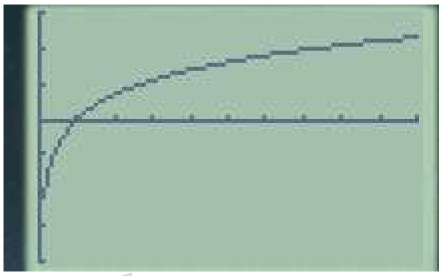
$$f: \ ]0;+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x) = \ln x$$

Autrement dit, on peut définir la fonction ln comme la fonction, définie sur $]0;+\infty[$, qui s'annule en 1 et dont la dérivée est la fonction inverse

$$f(x) = \ln x \quad sur \quad]0;+\infty[\, , \ f'(x) = \frac{1}{x} \quad sur \quad]0;+\infty[$$

Premières propriétés analytiques

Comme la dérivée de ln est la fonction inverse, strictement positive sur $]0;+\infty[$, alors la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$



L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe

L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x-1) + f(1) = x-1$

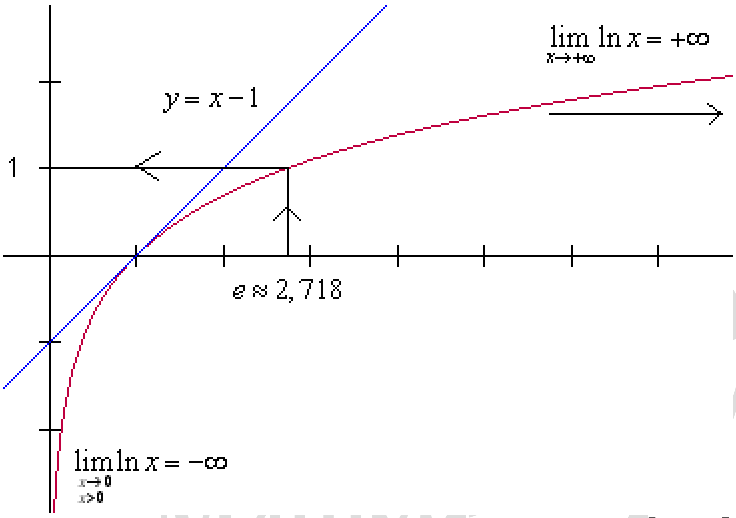


Tableau complet des variations :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+		+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Comme la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, deux réels strictement positifs sont rangés dans le même ordre que leurs logarithmes. Autrement dit :

Propriété :

Soient a et b deux nombres strictement positifs. Alors $\boxed{a < b \Leftrightarrow \ln a < \ln b}$.

Conséquence :

Le logarithme d'un nombre strictement supérieur à 1 est strictement positif . $a > 1 \Leftrightarrow \ln(a) > 0$

Le logarithme d'un nombre strictement inférieur à 1 est strictement négatif : $0 < a < 1 \Leftrightarrow \ln(a) < 0$

Propriétés algébriques

Pour tous nombres a et b strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \qquad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

$\ln\left(a^r\right) = r \ln a$ (pour tout réel r) (ce dernier résultat est très utilisé dans des problèmes d'ordre financier)

Cas particulier : Pour $a>0$, $\sqrt{a} = (a)^{\frac{1}{2}}$ donc $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$

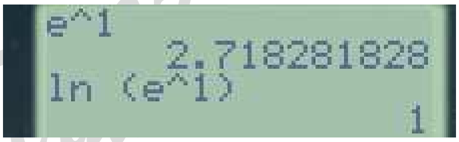
Propriété :

Soient a et b deux nombres strictement positifs. Alors $a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$

jgcuaz@hotmail.com

<u>Le nombre e :</u>

Comme la fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, et comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, l'équation $\ln x = 1$ admet une unique solution.



On note *e* le nombre dont le logarithme népérien vaut 1.

Une approximation décimale de *e* à 10^{-3} près est 2,718

<u>En conséquence</u> : Pour nombre entier *m*, la solution de l'équation ln *x*= *m* est $x = e^m$. En effet,

$\ln x = m \Leftrightarrow \ln x = m\times 1 \Leftrightarrow \ln x = m\times \ln e \Leftrightarrow \ln x = \ln\left(e^m\right) \Leftrightarrow x = e^m$

Nous admettrons que le théorème s'étend au cas d'un réel quelconque *m*.

<u>Dérivée d'une fonction composée avec le logarithme</u>

<u>Théorème :</u>

Soit *u* une fonction dérivable sur un intervalle *I* et telle que, pour tout *x* de *I*, on ait $u(x) > 0$; alors :

La fonction ln *u* (qui à tout réel *x* associe $\ln(u(x))$ est dérivable sur *I* et la dérivée de ln *u* est $\dfrac{u'}{u}$

Ce théorème s'utilise aussi dans l'autre sens : Une primitive d'une fonction de la forme $\dfrac{u'}{u}$ sera $\ln(u)$ sur tous les intervalles où *u* est strictement positive et $\ln(-u)$ sur tous les intervalles où *u* est strictement négative.

Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sera $\ln(\lvert u\rvert)$ sur tout intervalle où *u* ne s'annule pas.

<u>Croissances comparées</u>

Pour traduire le fait que <u>la croissance de la fonction logarithme népérien est extrêmement lente</u>

Outre les limites $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, on retiendra les résultats suivants :

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0}$, et quel que soit le réel $\alpha > 0$, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0}$

Enfin $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0}$ et quel que soit le réel $\alpha > 0$, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0}$

(on retiendra qu'en présence d'une expression où se mêlent polynômes et logarithmes, ce sont toujours les expressions polynomiales «qui l'emportent»)

<u>Démonstration :</u>

1) Pour tout $x\in]1;+\infty[$, on pose $f(x) = \ln(x) - 2\sqrt{x}$. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme différence de deux fonctions qui le sont, et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1-\sqrt{x}}{x}$. Ainsi, pour tout $x\in]1;+\infty[$, $\sqrt{x} > 1$ donc $f'(x) < 0$. La fonction *f* est donc strictement décroissante sur $]1;+\infty[$. Ainsi, pour tout $x\in]1;+\infty[$, $f(x) < f(1)$.

Puisque $f(1) = \ln(1) - 2\sqrt{1} = -2 < 0$, o nen déduit que pour tout $x\in]1;+\infty[$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 2\sqrt{x}$.

Ainsi, pour tout $x\in]1;+\infty[$, $0 < \dfrac{\ln(x)}{x} < \dfrac{2\sqrt{x}}{x}$, c'est-à-dire $0 < \dfrac{\ln(x)}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$. Mais puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$, le théorème des gendarmes nous permet de conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Soit $\alpha > 0$

Posons $X = x^\alpha$. Puisque $x\in]0;+\infty[$, on a alors $x = X^{\frac{1}{\alpha}}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} X = \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X^{\frac{1}{\alpha}}}{X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\ln X}{X} = 0$ d'après le résultat précédent.

jgcuaz@hotmail.com

2) Si on pose $X=\frac{1}{x} \Leftrightarrow x=\frac{1}{X}$, on a alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} X = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$, et on aura donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x \ln x = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{1}{X} \ln \frac{1}{X} = \lim\limits_{X \to +\infty} -\frac{\ln X}{X} = 0$

Posons $X = x^{\alpha}$. Puisque $x \in \left]0;+\infty\right[$, on a alors $x = X^{\frac{1}{\alpha}}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} X = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^{\alpha} = 0$

De plus $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^{\alpha} \ln x = \lim\limits_{X \to 0} X \ln X^{\frac{1}{\alpha}} = \lim\limits_{X \to 0} \frac{1}{\alpha} X \ln X = 0$ d'après le résultat précédent.

2) Fonction logarithme décimal

La fonction logarithme décimal est la fonction définie sur]0;+∞[par

$$\text{Log} : \begin{array}{l} \left]0;+\infty\right[\to \mathbb{R} \\ x \quad \to \log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \end{array}$$

Propriétés algébriques

La fonction log possède les mêmes propriétés algébriques que la fonction ln, à savoir :
Pour tous nombres *a* et *b* strictement positifs :

$\log(a \times b) = \log a + \log b$ $\qquad$ $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$ $\qquad$ $\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log a$

$\log\left(a^{r}\right) = r \log a$ (pour tout réel *r*)

log 1 = 0, log 10 = 1, log 100=2 et pour tout entier n, $\boxed{\log\left(10^{n}\right) = n}$

Propriétés analytiques

La fonction logarithme décimal étant définie par $\log x = k \ln x$ avec $k = \frac{1}{\ln 10} > 0$, ses variations et ses limites sont identiques à celles de la fonction ln.

 jgcuaz@hotmail.com