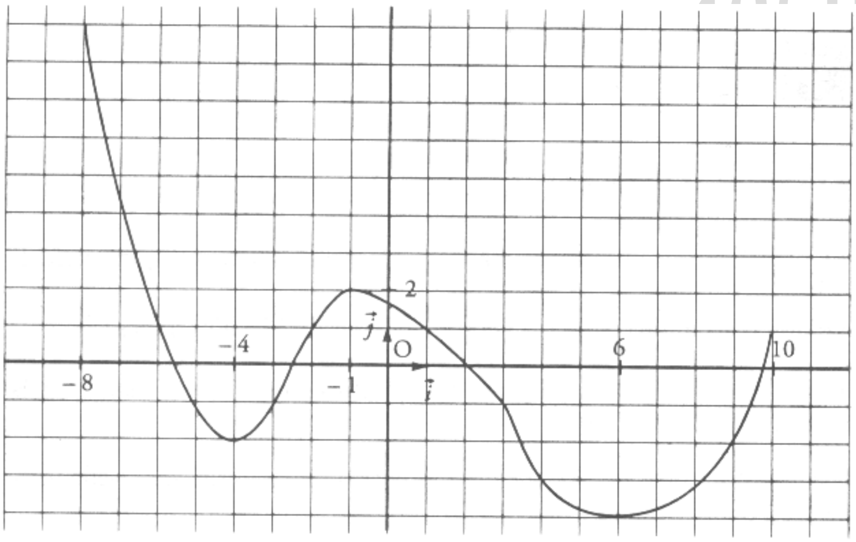
CALCUL D'AIRES - EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

Soit (C) la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. Hachurez sur le graphique ci-dessous les deux domaines ci-dessous : $D_1 = \left\{M(x;y)\ -2 \le x \le 0 ; 0 \le y \le f(x)\right\}$ $D_2 = \left\{M(x;y)\ 4 \le x \le 8 ; f(x) \le y \le 0\right\}$



Exercice n°2.

Etudier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x$, et calculer, en unités d'aires :

1) L'aire du domaine délimité par $\left(C_f\right)$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$

2) L'aire du domaine délimité par $\left(C_f\right)$, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$

Exercice n°3.

La figure 1 donne la représentation graphique d'une fonction f et la figure 2 celle d'une primitive de f sur $\mathbb{R}$

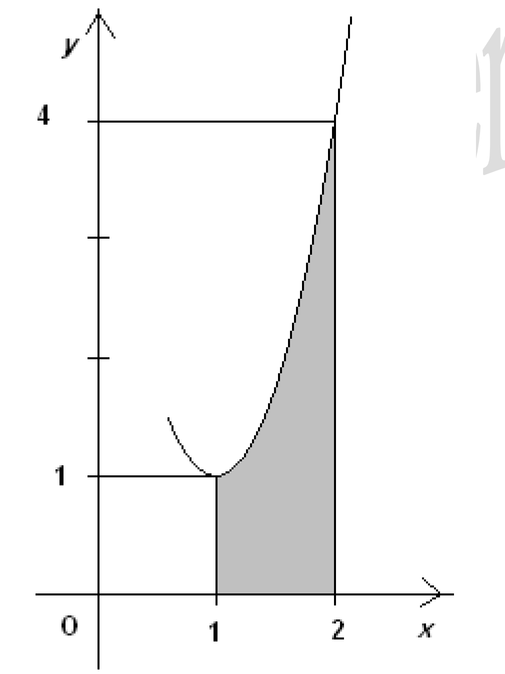


Figure 1

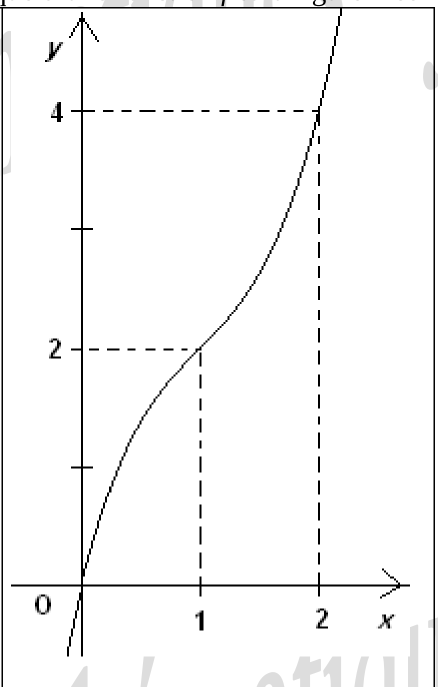


Figure 2

Avec ces seuls renseignements,, donnez l'aire du domaine colorié

Exercice n°4.

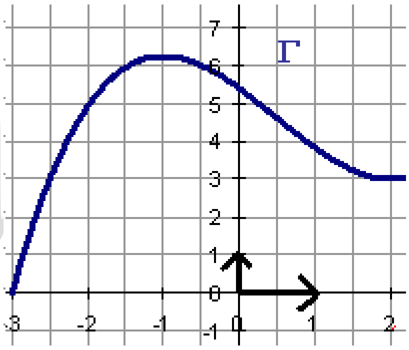
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$

1) Etudiez les variations de f

2) Démontrez que f est positive sur [-2;0]

3) Calculez l'aire de la partie D du plan limitée par (C), les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = -2$.

<u>Exercice n°5.</u>



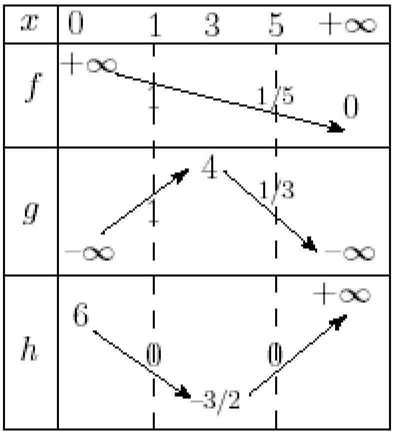
Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3;+\infty[$, croissante sur les intervalles $[-3;-1]$ et $[2;+\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $[-1;2]$. La courbe Γ représentative de la fonction f est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j})$.

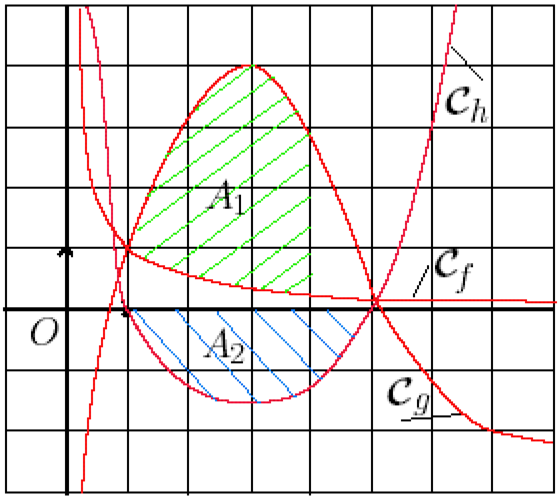
Est-il vrai que $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \geq 7$?

Donner un encadrement de $\int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x$

<u>Exercice n°6.</u>

Dans un plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm), on donne les tableaux de variations et les trois représentations graphiques C_f C_g, C_h respectives des fonctions *f*, *g*, *h* définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$:





1) Exprimer à l'aide d'intégrales, les mesures, exprimées en cm², des aires des domaines plans A_1 et A_2.

2) Sachant que sur l'intervalle [1, 3], $1 \leq g(x) \leq 4$, en déduire un encadrement de $\int_1^3 g(x)dx$

3) Déterminer le signe des intégrales suivantes en justifiant précisément chacune des réponses :

$\int_1^2 f(x)dx$ $\qquad$ $\int_1^3 -g(x)dx$ $\qquad$ $\int_1^2 h(x)dx$

4) Comparer les nombres I, J, K définis par :

I= $\int_1^3 f(x)dx$ $\qquad$ J= $\int_1^3 g(x)dx$ $\qquad$ K= $\int_1^3 h(x)dx$

<u>Exercice n°7.</u>

Considérons les fonctions *f* et *g* définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + \dfrac{4}{x^2}$ et $g(x) = x^2$

On note C_f et C_g les courbes représentant *f* et *g* dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Etudier la position de C_f par rapport à C_g

2) Calculer l'aire entre C_f et C_g pour $x \in [1;5]$

3) a) Calculer l'aire entre $A(t)$ entre C_f et C_g pour $x \in [1;t]$ (pour $t > 1$)

b) Calculer la limite en $+\infty$ de $A(t)$

Exercice n°8.

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2-7x+10}{2(1-x)}$ et on note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i}\ ,\vec{j}\ )$ d'unité 2 cm.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f

2) Etudier les variations de f et préciser les asymptotes horizontales et/ou verticales, les tangentes horizontales et les extremums. Dresser le tableau de variations de f

3) Démontrer que pour tout x de l'ensemble de définition, $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+3+\dfrac{2}{1-x}$

4) Calculer l'aire en cm^2 du domaine délimité par C, l'axe des abscisses, et les droites d'équation x=-3 et x=-2

Exercice n°9.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x^2}{2}\left(\ln x-\dfrac{3}{2}\right)$ si $x>0$ et $f(0)=0$

1) Etudier le sens de variations de f et étudier la limite de $f$en $+\infty$. Tracer la courbe représentative C) de f dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (on prendra 2 cm comme unité)

2) Soit $\lambda\in\left]0;e\right]$. On pose $I(\lambda)=\int_{\lambda}^{e}f(x)dx$

a) Calculer $I(\lambda)$ pour $\lambda\in\left]0;e\right]$

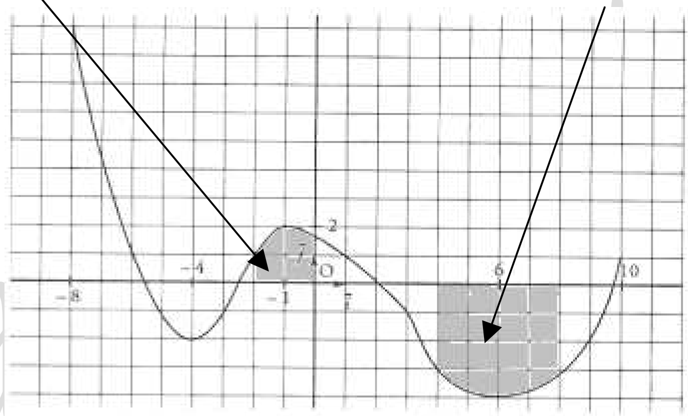
b) Calculer la limite de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0

c) En déduire l'aire de la partie d plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $(x=0)$ et $(x=e)$

CALCUL D’AIRES - CORRECTION

Exercice n°1

$D_1 = \{M(x;y) \; -2 \le x \le 0 ; 0 \le y \le f(x)\}$ $\qquad$ $D_2 = \{M(x;y) \; 4 \le x \le 8 ; f(x) \le y \le 0\}$



Exercice n°2

La fonction *f* est un trinôme du second degré, de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a = 1$, $b = -4$ et $c = 0$. Puisque $a > 0$, *f* est strictement décroissante sur $\left]-\infty ; -\frac{b}{2a}\right] =]-\infty ; 2]$ et strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$.

Elle atteint donc son minimum pour $x = 2$, lequel minimum vaut $f(2) = 2^2 - 4\times 2 = -4$

De plus puisque $f(x) = x^2 - 4x = x(4-x)$, on déduit le tableau de signes de *f* :

x		0		4	
$f(x) = x^2 - 4x$	+	0	−	0	+

1) Puisque pour tout $x \in [-1;0]$, $f(x) \ge 0$, l’aire du domaine délimité par (C_f), l’axe des abscisses, et les droites d’équations $x = -1$ et $x = 0$ sera donnée, en unités d’aires, par $\int_{-1}^{0} f(x)dx$. A l’aide d’une primitive de *f* sur [0 ;1], définie par $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2$, on calcule :

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = F(0) - F(-1)$$

$$= \left(\frac{0^3}{3} - 2\times 0^2\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 2\times(-1)^2\right) = -\left(\frac{-1}{3} - 2\right) = \frac{7}{3}$$

L’aire du domaine vaut donc $\frac{7}{3}$ unités d’aire

2) Puisque pour tout $x \in [0;4]$, $f(x) \le 0$, l’aire du domaine délimité par (C_f), l’axe des abscisses, et les droites d’équations $x = 0$ et $x = 4$ sera donnée, en unités d’aires, par $-\left(\int_{0}^{4} f(x)dx\right)$. A l’aide de la même primitive définie par $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2$, on calcule :

$$\int_{0}^{4} f(x)dx = F(4) - F(0)$$

$$= \frac{4^3}{3} - 2\times 4^2 - \left(\frac{0^3}{3} - 2\times 0^2\right) = \frac{64}{3} - 32 = -\frac{32}{3}$$

L’aire du domaine vaut donc $\frac{32}{3}$ unités d’aire

Exercice n°3

Puisque pour tout $x \in [1;2]$, $f(x) \geq 0$ (figure 1), l'aire du domaine colorié est égale à $\int_1^2 f(x)dx = F(2) - F(1)$.

On lit grâce à la figure 2 que $F(2) - F(1) = 4 - 2 = 2$ unités d'aire.

Exercice n°4

1) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$. Le calcul du discriminant de $f'(x)$ nous permet d'en déduire le signe de $f'(x)$, donc le sens de variation de f : $\Delta = 4^2 - 4\times3\times2 = 16 - 24 = -8 < 0$, donc $f'(x)$ garde un signe constant. Plus précisément pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) On calcule $f(-2) = (-2)^3 + 2\times(-2)^2 + 2\times(-2) + 4 = 0$ et $f(0) = 4$. Puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, pour tout réel $x \in [-2;0]$, on aura $f(-2) \leq f(x) \leq f(0)$, c'est-à-dire $f(x) \geq 0$

3) Puisque pour tout réel $x \in [-2;0]$, $f(x) \geq 0$, l'aire en cm^2 de la partie D du plan limitée par (C), les axes de coordonnées et la droite d'équation $x = -2$ sera égale à $\int_{-2}^{0} f(x)dx = F(0) - F(-2)$ où F est une primitive de *f* sur [0 ;2].

Une primitive de *f* sur [0 ;2] est donnée par $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x$, donc

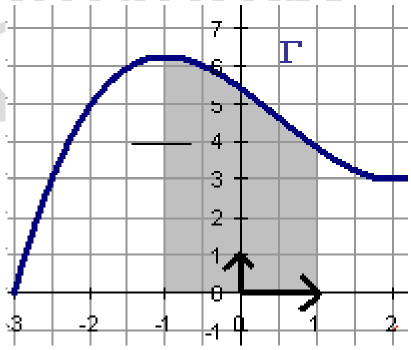
$$\int_{-2}^{0} f(x)dx = F(0) - F(-2) = \frac{0^4}{4} + \frac{2\times0^3}{3} + 0^2 + 4\times0^2 - \left(\frac{(-2)^4}{4} + \frac{2\times(-2)^3}{3} + (-2)^2 + 4\times(-2)\right)$$

$$= -\left(\frac{-16}{3}\right) = \frac{16}{3} \text{ unités d'aires}$$

Exercice n°5

Si le côté du carreau mesure 1 cm, les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ nous indiquent que 1 unité d'aire = 2 cm^2

Puisque pour tout $x \in [-1;1]$, $f(x) \geq 0$, l'intégrale $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ mesure, en unités d'aires, l'aire du domaine délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$.
Ce domaine est hachuré ci-contre :



En comptant le nombre de petits carreaux, on constate que l'aire du domaine hachurée est supérieure à 18 cm^2 (et même plus !), c'est-à-dire 9 unités d'aire. Ainsi l'inégalité $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \geq 7$ est VRAIE

Puisque pour tout $x \in [-2;-1]$, $f(x) \geq 0$, l'intégrale $\int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x$ mesure, en unités d'aires, l'aire du domaine délimité par la courbe Γ, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = -2$ et $x = -1$.
En comptant le nombre de petits carreaux, on peut affirmer que cette aire est comprise entre 11 et 14 cm^2, donc que $\frac{11}{2} \leq \int_{-2}^{-1} f(x)\mathrm{d}x \leq 7$

Exercice n°6

1) D'après le graphique, 1 unité d'aire = 1 cm^2

Puisque pour tout $x \in [1;4]$, $g(x) \geq f(x) \geq 0$, l'aire du domaine A_1 est donné par l'intégrale $\int_1^4 \left(g(x) - f(x)\right)\mathrm{d}x$

Puisque pour tout $x \in [1;5]$, $h(x) \leq 0$, l'aire du domaine A_2 est donné par l'intégrale $-\int_1^5 h(x)\mathrm{d}x$

2)-Si pour tout $x\in[1;3]$, $1\le g(x)\le 4$, alors $\int_1^3 1dx\le\int_1^3 g(x)dx\le\int_1^3 4dx$ c'est-à-dire $2\le\int_1^3 g(x)dx\le 8$

3) Puisque pour tout $x\in[1;2]$, $f(x)\ge 0$, $\int_1^2 f(x)dx\ge 0$

Puisque pour tout $x\in[1;3]$, $g(x)\ge 0$, $\int_1^3 g(x)dx\ge 0$ donc $\int_1^3 -g(x)dx=-\int_1^3 g(x)dx\le 0$

Puisque pour tout $x\in[1;2]$, $h(x)\le 0$, $\int_1^2 h(x)dx\le 0$

4) Puisque pour tout $x\in[1;3]$, $g(x)\ge f(x)\ge 0$, on aura $\int_1^3 g(x)dx\ge\int_1^3 f(x)dx\ge 0$ c'est-à-dire $J\ge I\ge 0$

Puisque pour tout $x\in[1;3]$, $h(x)\le 0$, $\int_1^3 h(x)dx\le 0$.

Finalement $\boxed{K\le I\le J}$

Exercice n°7

1) Pour tout $x\in\,]0;+\infty[$, $f(x)-g(x)=x^2+\frac{4}{x^2}-x^2=\frac{4}{x^2}>0$, donc C_f est au dessus de C_g sur $]0;+\infty[$

2) Puisque pour tout $x\in[1;5]$, $f(x)\ge g(x)$, l'aire entre C_f et C_g vaut :

$$\int_1^5\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_1^5\frac{4}{x^2}dx=\left[-\frac{4}{x}\right]_1^5=-\frac{4}{5}+\frac{4}{1}=\frac{16}{5}$$

3) a) Puisque pour tout $x\in[1;t]$ (pour $t>1$), $f(x)\ge g(x)$, l'aire entre C_f et C_g vaut :

$$A(t)=\int_1^t\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_1^t\frac{4}{x^2}dx=\left[-\frac{4}{x}\right]_1^t=-\frac{4}{t}+\frac{4}{1}=4-\frac{4}{t}=\frac{4t-4}{t}$$

b) On trouve ainsi $\lim_{t\to+\infty}A(t)=\lim_{t\to+\infty}4-\frac{4}{t}=4$

Exercice n°8

1) La division par 1-*x* implique $1-x\ne 0$ donc $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}=\,]-\infty;1[\,\cup\,]1;+\infty[$

2) *f* est dérivable sur chacun des intervalles de D_f, en tant que quotient de fonctions qui le sont, et puisque *f* est de la forme $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$, où $u(x)=x^2-7x+10\Rightarrow u'(x)=2x-7$ et $v(x)=2(1-x)\Rightarrow v'(x)=-2$, on en déduit que pour tout

$$x\in\,]-\infty;1[\,\cup\,]1;+\infty[,\ f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}=\frac{(2x-7)\times 2(1-x)-(x^2-7x+10)\times(-2)}{(2(1-x))^2}$$

$$=\frac{4x-4x^2-14+14x+2x^2-14x+20}{4(1-x)^2}=\frac{-2x^2+4x+6}{4(1-x)^2}=\frac{2(-x^2+2x+3)}{4(1-x)^2}=\frac{-x^2+2x+3}{2(1-x)^2}$$

Puisque pour tout $x\in\,]-\infty;1[\,\cup\,]1;+\infty[$, $2(1-x)^2>0$, $f'(x)$ sera du même signe que $P(x)=-x^2+2x+3$. Le calcul du discriminant de P donne $\Delta=(2)^2-4\times(-1)\times 3=16>0$ donc P admet deux racines réelles distinctes $\alpha=\frac{-2-\sqrt{16}}{-2}=3$ et $\beta=\frac{-2+\sqrt{16}}{-2}=-1$, d'où $P(x)=-(x-\alpha)(x-\beta)=-(x+1)(x-3)$, d'où le tableau de signes de $P(x)$ donc de $f'(x)$:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	

On en déduit que *f* est strictement décroissante sur $x\in\,]-\infty;-1]$ et sur $[3;+\infty[$, et strictement croissante sur $[-1;1[$ et sur $]1;3]$. Elle atteint donc deux extremums locaux en $x=-1$ et $x=3$, qui valent respectivement $f(-1)=4{,}5$ et $f(3)=0{,}5$

Aux points d'abscisses –1 et 3, C admet une tangente horizontale.

La limite en $\pm\infty$ d'une fraction rationnelle étant celle du quotient simplifié de ses numérateur et dénominateur, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{x}{2} = -\infty$ et de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{-2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{x}{2} = +\infty$

De plus, $\lim\limits_{x\to1} x^2-7x+10 = 4$. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} 2(1-x) = 0^-$ (car $x>1 \Leftrightarrow 1-x<0$), on en déduit, par quotient, que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = -\infty$. De même, puisque $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} 2(1-x) = 0^+$, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = +\infty$. La droite d'équation $x=1$ est donc asymptote verticale à la courbe C.

Résumons cela dans le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4,5	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	0,5	$\searrow$	$-\infty$

3) Pour tout $x \in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$,

$-\frac{1}{2}x+3+\frac{2}{1-x} = -\frac{x(1-x)}{2(1-x)} + \frac{3\times2(1-x)}{2(1-x)} + \frac{4}{2(1-x)} = \frac{-x+x^2+6-6x+4}{2(1-x)} = \frac{x^2-7x+10}{2(1-x)} = f(x)$, d'où l'égalité demandée

4) Puisque pour tout $x\in[-3;-2]$, $f(x)>0$, l'aire considérée, mesurée en unités d'aires (ici $1\,ua = 2\times2 = 4\,cm^2$) sera obtenue en calculant $\int_{-3}^{-2} f(x)dx = F(-2)-F(-3)$ où F est une primitive de *f* sur [-3 ;-2]

L'écriture de la question précédente nous permet d'en déduire l'écriture d'une primitive de *f* sur [-3 ;-2] :

Pour tout $x\in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$, $f(x) = -\frac{1}{2}x+3-\frac{2\times u'(x)}{u(x)}$ où $u(x)=1-x$. Ainsi une primitive de *f* sur [-3 ;-2] est :

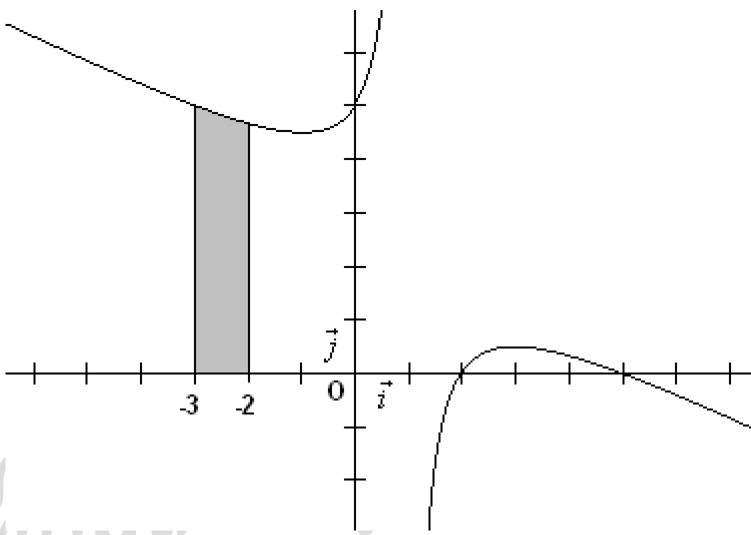
$F(x) = -\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2}+3x-2\ln(|u(x)|)$.

Or, pour tout $x\in[-3;-2]$, $1-x>0 \Leftrightarrow u(x)>0 \Leftrightarrow |u(x)| = u(x)$ donc $\boxed{F(x) = -\frac{x^2}{4}+3x-2\ln(1-x)}$.

Ainsi, $F(-2)-F(-3) = -\frac{(-2)^2}{4}+3\times(-2)-2\ln(1-(-2)-\left(-\frac{(-3)^2}{4}+3\times(-3)-2\ln(1-(-3))\right)$

$= -1-6-2\ln3+\frac{9}{4}+9+2\ln(4) = 2+\ln16-\ln9 = 2+\ln\left(\frac{16}{9}\right)$

L'aire cherchée vaut $4\left(2+\ln\left(\frac{16}{9}\right)\right) = 8+4\ln\left(\frac{16}{9}\right) \approx 10,3\ cm^2$

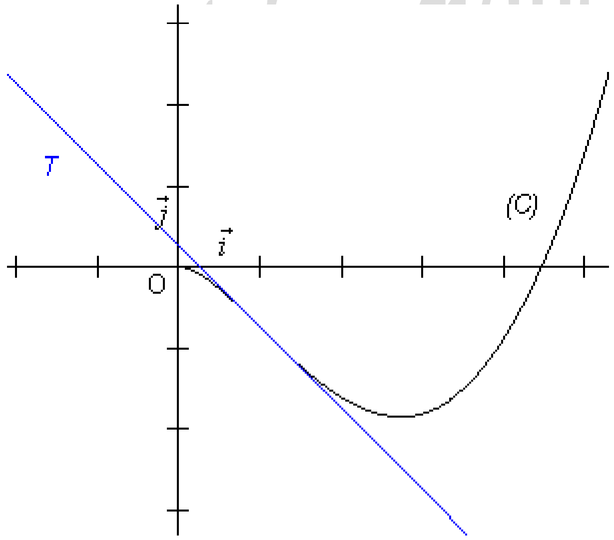


Exercice n°9

1) Pour tout $x>0$, $f'(x)=x\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)+\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{x}\right)=x\ln x-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x=x\ln x-x=x(\ln x-1)$. Puisque $x>0$, $f'(x)$ est du signe de $\ln x-1$. Ainsi $f'(x)>0\Leftrightarrow \ln x-1>0\Leftrightarrow \ln x>1\Leftrightarrow x>e$

f est donc strictement décroissante sur $]0;e]$ et strictement croissante sur $[e;+\infty[$.

De plus, $\lim_{x\to+\infty}\ln x-\frac{3}{2}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}=+\infty$, donc par produit $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$



2) a) Pour calculer $I(\lambda)=\int_\lambda^e f(x)dx=\int_\lambda^e\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)dx$, on doit effectuer une **<u>intégration par parties</u>**

On pose $u(x)=\ln x-\frac{3}{2}\Rightarrow u'(x)=\frac{1}{x}$ et $v'(x)=\frac{x^2}{2}\Rightarrow v(x)=\frac{x^3}{6}$, fonctions toutes deux continûment dérivables sur tout intervalle de la forme $]\lambda;e]$ (avec $\lambda>0$). Le calcul devient alors :

$$I(\lambda)=\int_\lambda^e f(x)dx=\int_\lambda^e\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)dx=\int_\lambda^e v'(x)u(x)dx=\left[u(x)v(x)\right]_\lambda^e-\int_\lambda^e u'(x)v(x)dx=\left[\frac{x^3}{6}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)\right]_\lambda^e-\int_\lambda^e\frac{x^3}{6}\times\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{e^3}{6}\left(\ln e-\frac{3}{2}\right)-\frac{\lambda^3}{6}\left(\ln\lambda-\frac{3}{2}\right)-\int_\lambda^e\frac{x^2}{6}dx=-\frac{e^3}{12}-\frac{\lambda^3}{6}\ln\lambda+\frac{\lambda^3}{4}-\left[\frac{x^3}{18}\right]_\lambda^e=-\frac{e^3}{12}-\frac{\lambda^3}{6}\ln\lambda+\frac{\lambda^3}{4}-\frac{e^3}{18}+\frac{\lambda^3}{18}$$

$$=-\frac{5e^3}{36}+\frac{11\lambda^3}{36}-\frac{\lambda^3}{6}\ln\lambda$$

b) Puisque $\lim_{\lambda\to0}\lambda\ln\lambda=0$ et $\lim_{\lambda\to0}\frac{11}{36}\lambda^3=0$, on en déduit, par somme, que $\boxed{\lim_{\lambda\to0}I(\lambda)=-\frac{5e^3}{36}}$

c) Puisque pour tout $x\in]0;e]$, $f(x)<0$, l'intégrale $I(\lambda)=\int_\lambda^e f(x)dx$ représente, en unité d'aires, l'opposé de l'aire du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x=\lambda$ et $x=e$.

Si on fait tendre λ vers 0, on peut donc affirmer que l'aire du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=e$ vaut $\frac{5e^3}{36}$.