CALCUL INTEGRAL - EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1

Soit les deux suites $\left(I_n\right)$ et $\left(J_n\right)$ définies par :

$$I_n = \int_0^2 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx \text{ et } J_n = \frac{I_n}{e^{2n}} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1) Calculer I_1 , $I_0 + I_1$ et I_0.

2) Montrer que la suite $\left(I_n\right)$ est croissante.

3) Démontrer que : $\dfrac{e^{2n}-1}{n\left(e^2+1\right)} \leq I_n \leq \dfrac{e^{2n}-1}{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(on pourra prouver que, sous certaines conditions à préciser, $2 \leq 1+e^x \leq 1+e^2$.

4) En déduire les limites de $\left(I_n\right)$ et $\left(J_n\right)$.

5) Calculer, en fonction de *n*, la valeur de $I_n + I_{n+1}$.

En déduire une méthode permettant le calcul explicite de I_n en fonction de *n*.

Exercice n°2

On considère les réels $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{n!}e^{1-t}dt$ pour tout *n* entier naturel.

1) Calculer I_0 et I_1

2) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout *n* entier naturel non nul, on a $I_n - I_{n-1} = -\dfrac{1}{n!}$

3) Montrer que pour tout *n* entier naturel on a : $I_n = e - \displaystyle\sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!}$

4) Montrer que pour tout *n* entier naturel non nul, on a : $0 \leq I_n \leq \dfrac{2}{n!}$

5) En déduire la limite de la suite $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

CALCUL INTEGRAL - CORRECTION

Exercice n°1

Soit les deux suites $\left(I_n\right)$ et $\left(J_n\right)$ définies par : $I_n=\int_0^2 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$ et $J_n=\frac{I_n}{e^{2n}}$ pour tout entier naturel *n*.

1) Calculer I_1 , I_0+I_1 et I_0.

On calcule $I_1=\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx=\left[\ln\left(1+e^x\right)\right]_0^2=\ln\left(1+e^2\right)-\ln\left(1+e^0\right)=\ln\left(1+e^2\right)-\ln(2)\boxed{=\ln\left(\frac{1+e^2}{2}\right)}$,

puis $I_0+I_1=\int_0^2 \frac{1}{1+e^x}dx+\int_0^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx=\int_0^2 \frac{1}{1+e^x}+\frac{e^x}{1+e^x}dx=\int_0^2 \frac{1+e^x}{1+e^x}dx=\int_0^2 1dx=\left[x\right]_0^2\boxed{=2}$.

On en déduit $I_0=2-I_1\boxed{=2-\ln\left(\frac{1+e^2}{2}\right)}$

2) Montrer que la suite $\left(I_n\right)$ est croissante.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on calcule $I_{n+1}-I_n=\int_0^2 \frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x}dx-\int_0^2 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx=\int_0^2 \frac{e^{(n+1)x}-e^{nx}}{1+e^x}dx=\int_0^2 \frac{e^{nx}\left(e^x-1\right)}{1+e^x}dx$.

Pour tout $x\in[0;2]$, $1+e^x>0$, $e^x-1\geq 0$ et $e^{nx}>0$ quel que soit $n\in\mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{e^{nx}\left(e^x-1\right)}{1+e^x}\geq 0$

et par positivité de l'intégrale, $\int_0^2 \frac{e^{nx}\left(e^x-1\right)}{1+e^x}dx\geq 0 \Leftrightarrow I_{n+1}-I_n\geq 0 \Leftrightarrow I_{n+1}\geq I_n$, ce qui nous permet d'en déduire que $\boxed{\text{la suite } \left(I_n\right) \text{ est croissante}}$.

3) Démontrer que : $\frac{e^{2n}-1}{n\left(e^2+1\right)}\leq I_n\leq\frac{e^{2n}-1}{2n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

(on pourra prouver que, sous certaines conditions à préciser, $2\leq 1+e^x\leq 1+e^2$).

Pour tout $x\in[0;2]$, $0\leq x\leq 2$, puis par croissance de la fonction exponentielle, $1\leq e^x\leq e^2$, et par suite $2\leq 1+e^x\leq 1+e^2$ et $\frac{1}{1+e^2}\leq\frac{1}{1+e^x}\leq\frac{1}{2}$.

Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $x\in[0;2]$, $e^{nx}>0$, on aura $\frac{e^{nx}}{1+e^2}\leq\frac{e^{nx}}{1+e^x}\leq\frac{e^{nx}}{2}$.

Par passage aux intégrales dans les inégalités, on aura : $\int_0^2 \frac{e^{nx}}{1+e^2}dx\leq\int_0^2 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx\leq\int_0^2 \frac{e^{nx}}{2}dx$

On calcule successivement $\int_0^2 \frac{e^{nx}}{1+e^2}dx=\frac{1}{1+e^2}\int_0^2 e^{nx}dx=\frac{1}{1+e^2}\left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^2=\frac{1}{1+e^2}\left[\frac{1}{n}e^{2n}-\frac{1}{n}e^{0\times n}\right]=\frac{e^{2n}-1}{n\left(1+e^2\right)}$

et $\int_0^2 \frac{e^{nx}}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 e^{nx}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^2=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}e^{2n}-\frac{1}{n}e^{0\times n}\right]=\frac{e^{2n}-1}{2n}$.

$\boxed{\text{L'inégalité } \int_0^2 \frac{e^{nx}}{1+e^2}dx\leq\int_0^2 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx\leq\int_0^2 \frac{e^{nx}}{2}dx \text{ c'est-à-dire } \frac{e^{2n}-1}{n\left(e^2+1\right)}\leq I_n\leq\frac{e^{2n}-1}{2n} \text{ est démontrée.}}$

4) En déduire les limites de $\left(I_n\right)$ et $\left(J_n\right)$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{e^{2n}-1}{n\left(1+e^2\right)}=\frac{1}{1+e^2}\times\left(2\times\frac{e^{2n}}{2n}-\frac{1}{n}\right)$. D'après une limite du cours, on a $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{2n}}{2n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

Puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, on en déduit par différence et par produit, que $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{2n}-1}{n\left(1+e^2\right)}=+\infty$. Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n\geq\frac{e^{2n}-1}{n\left(e^2+1\right)}$ et puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{2n}-1}{n\left(e^2+1\right)}=+\infty$, on en déduit par minoration que $\boxed{\lim_{n\to+\infty}I_n=+\infty}$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{e^{2n}-1}{n\left(e^2+1\right)}\leq I_n\leq\frac{e^{2n}-1}{2n}$ et $e^{2n}>0$ donc $\frac{e^{2n}-1}{ne^{2n}\left(e^2+1\right)}\leq\frac{I_n}{e^{2n}}\leq\frac{e^{2n}-1}{2ne^{2n}}$, c'est-à-dire $\frac{e^{2n}-1}{ne^{2n}\left(e^2+1\right)}\leq J_n\leq\frac{e^{2n}-1}{2ne^{2n}}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{e^{2n}-1}{ne^{2n}\left(e^2+1\right)}=\frac{e^{2n}\left[1-\frac{1}{e^{2n}}\right]}{ne^{2n}\left(e^2+1\right)}=\frac{1-\frac{1}{e^{2n}}}{n\left(e^2+1\right)}$. $\lim_{n\to+\infty}e^{2n}=+\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e^{2n}}=0$. Puisque $\lim_{n\to+\infty}n\left(e^2+1\right)=+\infty$, on aura par différence et quotient, $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{2n}-1}{ne^{2n}\left(e^2+1\right)}=0$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{e^{2n}-1}{2ne^{2n}}=\frac{e^{2n}\left[1-\frac{1}{e^{2n}}\right]}{2ne^{2n}}=\frac{1-\frac{1}{e^{2n}}}{2n}$. Puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e^{2n}}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}2n=+\infty$, on en conclut par différence et quotient que $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{2n}-1}{2ne^{2n}}=0$.

Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{e^{2n}-1}{ne^{2n}\left(e^2+1\right)}\leq J_n\leq\frac{e^{2n}-1}{2ne^{2n}}$ et puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{2n}-1}{ne^{2n}\left(e^2+1\right)}=0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{2n}-1}{2ne^{2n}}=0$, on en conclut, grâce au théorème d'encadrement dit « des gendarmes », que $\boxed{\lim_{n\to+\infty}J_n=0}$

5) Calculer, en fonction de *n*, la valeur de I_n+I_{n+1}.
En déduire une méthode permettant le calcul explicite de I_n en fonction de *n*.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on calcule :

$$I_n+I_{n+1}=\int_0^2\frac{e^{nx}}{1+e^x}dx+\int_0^2\frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x}dx=\int_0^2\frac{e^{nx}+e^{(n+1)x}}{1+e^x}dx=\int_0^2\frac{e^{nx}\left(1+e^x\right)}{1+e^x}dx=\int_0^2e^{nx}dx=\left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^2=\boxed{\frac{1}{n}\left(e^{2n}-1\right)}.$$

Pour calculer I_n en fonction de *n*,

- connaissant $I_1=\ln\left(\frac{1+e^2}{2}\right)$,
- on calcule $I_1+I_2=e^2-1$ d'où on tirera la valeur de I_2
- on calcule $I_2+I_3=\frac{1}{2}\left(e^4-1\right)$ d'où on tirera la valeur de I_3

et de proche en proche....
connaissant I_n, on calcule $I_n+I_{n+1}=\frac{1}{n}\left(e^{2n}-1\right)$ d'où on tirera la valeur de I_{n+1}

<u>Exercice n°2</u>

1) Pour *n*=0, on doit calculer $I_0=\int_0^1\frac{t^0}{0!}e^{1-t}dt$. En convenant que 0 !=1, et puisque pour tout *t*>0, $t^0=1$ (on convient que $0^0=1$) le calcul est donc $I_0=\int_0^1e^{1-t}dt=\left[-e^{1-t}\right]_0^1=-e^0+e^1\boxed{=e-1}$

Pour n=1, on doit calculer $I_1=\int_0^1 \frac{t^1}{1!}e^{1-t}dt=\int_0^1 te^{1-t}dt=\int_0^1 u(t)v'(t)\,dt$ avec $u(t)=t \Rightarrow u'(t)=1$ et $v'(t)=e^{1-t} \Rightarrow v(t)=-e^{1-t}$ qui sont continûment dérivables sur [0 ;1].

Ainsi $I_1=\left[u(t)v(t)\right]_0^1-\int_0^1 u'(t)v(t)\,dt=\left[-te^{1-t}\right]_0^1+\int_0^1 e^{1-t}dt=-1\times e^0+0\times e^1+I_0=-1+(e-1)\boxed{=e-2}$

2) Pour tout entier n non nul, $I_n=\int_0^1 \frac{t^n}{n!}e^{1-t}dt=\int_0^1 u(t)v'(t)\,dt$ avec $u(t)=\frac{t^n}{n!} \Rightarrow u'(t)=\frac{nt^{n-1}}{n!}=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ et $v'(t)=e^{1-t} \Rightarrow v(t)=-e^{1-t}$ qui sont continûment dérivables sur [0 ;1]. Ainsi $I_n=\left[u(t)v(t)\right]_0^1-\int_0^1 u'(t)v(t)\,dt$ $=\left[-\frac{t^n}{n!}e^{1-t}\right]_0^1+\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{1-t}dt=-\frac{1}{n!}+\frac{0^n}{n!}e^{1-0}+I_{n-1}$ d'où la relation $\boxed{I_n-I_{n-1}=-\frac{1}{n!}}$

3) Montrons par récurrence que pour tout entier n , $I_n=e-\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}$. Notons $Q(k)$ la propriété « $I_k=e-\sum_{p=0}^{k}\frac{1}{p!}$ »

<u>Initialisation :</u> La propriété est vraie pour k=0 car $e-\sum_{p=0}^{0}\frac{1}{p!}=e-\frac{1}{0!}=e-1$ (par convention 0 !=1), et puisqu'on a calculé $I_0=e-1$ dans la question 1)

<u>Hérédité</u> : Supposons la propriété vraie $Q(m)$ pour un entier m fixé, à savoir $I_m=e-\sum_{p=0}^{m}\frac{1}{p!}$.

On a alors, d'après la question 2), $I_{m+1}=I_m-\frac{1}{(m+1)!}$, donc en appliquant l'hypothèse de récurrence, $I_{m+1}=e-\sum_{p=0}^{m}\frac{1}{p!}-\frac{1}{(m+1)!}=e-\sum_{p=0}^{m+1}\frac{1}{p!}$, ce qui est la propriété à l'ordre m+1, et achève donc la phase d'hérédité, et la démonstration par récurrence.

<u>Conclusion :</u> La propriété $I_n=e-\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}$ est vraie pour tout entier n

4) Posons, pour tout entier n non nul, $f_n(t)=t^ne^{1-t}$.

Pour tout entier n non nul, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout t réel, $f_n{}'(t)=nt^{n-1}e^{1-t}-t^ne^{1-t}=t^{n-1}e^{1-t}(n-t)$

Si n est un entier non nul, donc supérieur à 1, on peut affirmer que pour tout $t\in[0,1]$, $f_n{}'(t)=t^{n-1}e^{1-t}(n-t)\geq 0$, donc que f_n est croissante sur [0 ;1]. Elle atteint donc son maximum lorsque t=1, lequel maximum vaut $f_n(1)=1^ne^{1-1}=1$. Ainsi, on peut affirmer que pour tout $t\in[0,1]$, $f_n(t)\leq 1$. On passe aux inégalités dans l'intégrale. Ainsi $I_n=\int_0^1 \frac{t^n}{n!}e^{1-t}dt\leq\int_0^1 \frac{1}{n!}dt\leq\frac{1}{n!}(1-0)$. L'inégalité $I_n\leq\frac{2}{n!}$ (et même $I_n\leq\frac{1}{n!}$!) est donc vérifiée pour tout n non nul

Enfin, puisque pour tout $t\in[0,1]$, $f_n(t)=t^ne^{1-t}>0$, l'inégalité $I_n\geq 0$ est vérifiée par positivité de l'intégrale d'une fonction positivie. Ainsi, pour tout entier naturel n non nul, $\boxed{0\leq I_n\leq\frac{2}{n!}}$

5) Puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n!}=0$, le théorème d'encadrement « des gendarmes » nous permet de conclure que

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n=0}$ (ce qui permet, au passage, d'étalir le résultat $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}=e}$)