CALCUL INTEGRAL - EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

Calculez les intégrales suivantes :

1) $\int_0^3 (x-4)\,dx$ **2)** $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(2t-1+\frac{1}{t^2}\right)dt$ **3)** $\int_{-2}^0 4t^3 dt$ **4)** $\int_1^4 \frac{dx}{x^2}$

5) $\int_0^3 \frac{2}{(2x+3)^2}dx$ **6)** $\int_4^2 \frac{dx}{(4-3x)^2}$ **7)** $\int_1^{-1} \frac{dx}{\sqrt{4-2x}}$ **8)** $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{5-3x}}dx$

9) $\int_0^2 \frac{dx}{x+1}$ **10)** $\int_{-4}^{-3} \frac{3}{x+2}dx$ **11)** $\int_{-2}^0 \frac{4}{1-5x}dx$ **12)** $\int_1^2 \frac{x^2+x-2}{x^2}dx$

13) $\int_3^4 \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2-x}-\frac{4}{x+2}\right)dx$ **14)** $\int_2^5 e^x dx$ **15)** $\int_2^5 -e^{-x}dx$ **16)** $\int_0^2 2e^{2x-1}dx$

17) $\int_2^1 \left(e^{2t}+2e^t-3\right)dt$ **18)** $\int_{-1}^1 e^{3x+1}dx$ **19)** $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$

20) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$ **21)** $\int_{\ln 3}^{\ln 10} e^x\left(e^x-3\right)dx$ **22)** $\int_0^1 \frac{e^{-x}-2}{e^x}dx$ **23)** $\int_{-1}^0 \frac{\ln(1-x)}{x-1}dx$

Exercice n°2. Vrai ou Faux ?

Soient f et g deux fonctions quelconques continues et positives sur $[0;+\infty[$.

1) La fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $x \mapsto \int_5^x f(t)dt$ a pour dérivée *f*.

2) La fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $x \mapsto \int_5^x f(t)dt$ prend des valeurs toutes positives ou nulles.

3) Pour tous réels *a* et *b* de $[0;+\infty[$, $\int_a^b f(x)g(x)dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)$.

4) $\int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = 0$

5) $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \frac{1}{3}$.

6) $\int_0^{-\pi} \sin^4 x dx = \int_0^{\pi} \sin^4 x dx$.

Exercice n°3.

Calculez l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx$ (indication : $\frac{1}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1}$)

Exercice n°4.

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x\ln x - x$

1) Déterminez la dérivée g' de g

2) Calculez $\int_1^e \ln x dx$

Exercice n°5.

Soit *f* la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-1}$

1) Montrez que pour tout *x* de $]1;+\infty[$, $f(x) = x+4+\frac{3}{x-1}$

2) Calculez $\int_4^2 \frac{x^2+3x-1}{x-1}dx$

Exercice n°6.

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$ par $f(x)=\frac{6x^2+13x+4}{3x+2}$

1) Trouver trois nombres réels a, b et c tels que pour tout x de $\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$, $f(x)=ax+b-\frac{c}{3x+2}$

2) Calculez $\int_0^2 \frac{6x^2+13x+4}{3x+2}dx$

Exercice n°7.

1) Etudiez le signe de x^2-5x+6 sur [0,7]

2) En utilisant la relation de Chasles, calculez $\int_0^7 \left|x^2-5x+6\right| dx$

Exercice n°8.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

1) Etudiez les variations de f

2) Démontrez que pour tout x de [-1;2], $\frac{1}{5}\leq f(x)\leq 1$

3) Démontrez que $\frac{3}{5}\leq \int_{-1}^2 \frac{1}{1+x^2}dx\leq 3$

Exercice n°9.

Etablir que $\int_0^1 x^2\sin x dx \leq \int_0^1 x\sin x dx$

Exercice n°10.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$. Calculez les valeurs moyennes de f sur [0;2], [1;3] et [-1;1]

Exercice n°11.

Calculez l'intégrale I en utilisant la formule d'intégration par parties:

1) $I=\int_{-1}^0 xe^x dx$ **2)** $I=\int_{-1}^0 (x+2)e^x dx$ **3)** $I=\int_{-1}^0 (x+2)e^{x+1}dx$ **4)** $I=\int_1^e x\ln x dx$ **5)** $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$

Exercice n°12.

On considère l'application f_n définie pour tout t de $\mathbb{R}^{+*}$ par $f_n(t)=\frac{1}{t\left(t^n+1\right)}$, où n est un entier strictement positif.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel t strictement positif : $f_n(t)=\frac{1}{t\left(t^n+1\right)}=\frac{at^{n-1}+b}{t^n+1}+\frac{c}{t}$

2) Montrer que : $\int_1^2 f_n(t)=\ln\left(\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2^n+1}}\right)$

3) A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $\int_1^2 \frac{t^{n-1}\ln t}{\left(t^n+1\right)^2}$

Exercice n°13.

On considère les réels $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t} dt$ pour tout n entier naturel.

1) Calculer I_0 et I_1

2) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout n entier naturel non nul, on a $I_n - I_{n-1} = -\frac{1}{n!}$

3) Montrer que pour tout n entier naturel on a : $I_n = e - \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!}$

4) Montrer que pour tout n entier naturel non nul, on a : $0 \le I_n \le \frac{2}{n!}$

5) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice n°14.

Calculez l'intégrale I en utilisant deux fois le théorème de l'intégration par parties:

1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$ **2)** $I = \int_0^{\pi} e^x \sin x dx$ **3)** $I = \int_0^{\pi} e^{2x} \cos x dx$

CALCUL INTEGRAL - CORRECTION

Exercice n°1

1) $\int_0^3 (x-4)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}-4x\right]_0^3 = \frac{3^2}{2}-4\times 3-\left(\frac{0^2}{2}-4\times 0\right) = \frac{9}{2}-12 = -\frac{15}{2}$

2) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(2t-1+\frac{1}{t^2}\right)dt = \left[t^2-t-\frac{1}{t}\right]_{\frac{1}{2}}^2 = 2^2-2-\frac{1}{2}-\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-\frac{1}{1/2}\right) = 4-\frac{1}{4} = \frac{15}{4}$

3) $\int_{-2}^0 4t^3\,dt = \left[t^4\right]_{-2}^0 = 0^4-(-2)^4 = -16$

4) $\int_1^4 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^4 = -\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{3}{4}$

5) $\int_0^3 \frac{2}{(2x+3)^2}\,dx = \int_0^3 \frac{u'(x)}{(u(x))^2}\,dx = \left[-\frac{1}{u(x)}\right]_0^3 = \left[-\frac{1}{2x+3}\right]_0^3 = -\frac{1}{2\times 3+3}+\frac{1}{2\times 0+3} = \frac{1}{3}-\frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

6) $\int_4^2 \frac{dx}{(4-3x)^2} = \int_4^2 -\frac{1}{3}\frac{-3}{(4-3x)^2}dx = \int_4^2 -\frac{1}{3}\frac{u'(x)}{(u(x))^2}dx = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{u(x)}\right]_4^2 = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4-3x}\right]_4^2 = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{8}$

7) $\int_1^{-1} \frac{dx}{\sqrt{4-2x}} = \int_1^{-1} -\frac{1}{2}\frac{-2dx}{\sqrt{4-2x}} = -\int_1^{-1} \frac{u'(x)\,dx}{2\sqrt{u(x)}} = -\left[\sqrt{u(x)}\right]_1^{-1} = -\left[\sqrt{4-2x}\right]_1^{-1} = -\sqrt{6}+\sqrt{2}$

8) $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{5-3x}}\,dx = \int_0^1 -\frac{2}{3}\times\frac{-3}{\sqrt{5-3x}}\,dx = -\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}\,dx = -\frac{2}{3}\left[2\sqrt{u(x)}\right]_0^1$

$= -\frac{2}{3}\left[2\sqrt{5-3x}\right]_0^1 = -\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{4\sqrt{5}}{3} = \frac{4}{3}\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$

9) $\int_0^2 \frac{dx}{x+1} = F(2)-F(0)$ où F est une primitive de $f(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ donc $F(x) = \ln\left(\left|u(x)\right|\right) = \ln\left(\left|x+1\right|\right)$.

Comme pour tout $x\in[0;2]$, $x+1>0$, on aura $F(x) = \ln(x+1)$ donc $\int_0^2 \frac{dx}{x+1} = \ln(3)-\ln(0+1) = \ln 3$

10) $\int_{-4}^{-3} \frac{3}{x+2}\,dx = F(-3)-F(-4)$ où F est une primitive de $f(x) = \frac{3}{x+2} = \frac{3u'(x)}{u(x)}$ donc

$F(x) = 3\ln\left(\left|u(x)\right|\right) = 3\ln\left(\left|x+2\right|\right)$. Comme pour tout $x\in[-4;-3]$, $x+2<0$, on aura

$F(x) = 3\ln\left(-(x+2)\right) = 3\ln(-x-2)$ donc $\int_{-4}^{-3} \frac{3}{x+2}\,dx = 3\ln\left(-(-3)-2\right)-3\ln\left(-(-4)-2\right) = 3\ln 1-3\ln(2) = -3\ln 2$

11) $\int_{-2}^0 \frac{4}{1-5x}\,dx = F(0)-F(2)$ où F est une primitive de $f(x) = \frac{4}{1-5x} = -\frac{4}{5}\times\frac{u'(x)}{u(x)}$ donc

$F(x) = -\frac{4}{5}\times\ln\left(\left|u(x)\right|\right) = -\frac{4}{5}\times\ln\left(\left|1-5x\right|\right)$. Comme pour tout $x\in[-2;0]$, $1-5x>0$, on aura

$F(x) = -\frac{4}{5}\times\ln(1-5x)$ donc $\int_{-2}^0 \frac{4}{1-5x}\,dx = -\frac{4}{5}\times\ln(1-5\times 0)-\left(-\frac{4}{5}\times\ln\left(1-5\times(-2)\right)\right) = \frac{4}{5}\ln(11)$

12) $\int_1^2 \frac{x^2+x-2}{x^2}\,dx = \int_1^2 \left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx = \left[x+\ln\left(|x|\right)+\frac{2}{x}\right]_1^2 = 2+\ln\left(|2|\right)+\frac{2}{2}-\left(1+\ln\left(|1|\right)+\frac{2}{1}\right) = \ln 2$

13) $\int_3^4 \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2-x}-\frac{4}{x+2}\right)dx = \left[\frac{1}{4}x+\ln\left(|2-x|\right)-4\ln\left(|x+2|\right)\right]_3^4$

$= \left(\frac{1}{4}\times 4+\ln\left(|2-4|\right)-4\ln\left(|4+2|\right)\right)-\left(\frac{1}{4}\times 3+\ln\left(|2-3|\right)-4\ln\left(|3+2|\right)\right) = \frac{1}{4}-4\ln(3)+3\ln 2$

14) $\int_2^5 e^x dx = \left[e^x\right]_2^5 = e^5 - e^2$ **15)** $\int_2^5 -e^{-x}dx = \int_2^5 u'(x)e^{u(x)}dx = \left[e^{u(x)}\right]_2^5 = \left[e^{-x}\right]_2^5 = e^{-5} - e^{-2} = \frac{1}{e^5} - \frac{1}{e^2} = \frac{e^2 - e^5}{e^7}$

16) $\int_0^2 2e^{2x-1}dx = \int_0^2 u'(x)e^{u(x)}dx = \left[e^{u(x)}\right]_0^2 = \left[e^{2x-1}\right]_0^2 = e^3 - e^{-1} = e^3 - \frac{1}{e} = \frac{e^4-1}{e}$

17) $\int_2^1 \left(e^{2t} + 2e^t - 3\right)dt = \left[\frac{1}{2}e^{2t} + 2e^t - 3t\right]_2^1 = \left(\frac{1}{2}e^2 + 2e^1 - 3\right) - \left(\frac{1}{2}e^4 + 2e^2 - 6\right) = -\frac{1}{2}e^4 - \frac{3}{2}e^2 + 2e + 3$

18) $\int_{-1}^1 e^{3x+1}dx = F(1) - F(-1)$ où F est une primitive de $f(x) = e^{3x+1} = \frac{1}{3}u'(x)e^{u(x)}$, donc $F(x) = \frac{1}{3}e^{u(x)} = \frac{1}{3}e^{3x+1}$.

Ainsi $\int_{-1}^1 e^{3x+1}dx = \frac{1}{3}e^{3\times1+1} - \frac{1}{3}e^{3\times(-1)+1} = \frac{1}{3}\left(e^4 - e^{-2}\right) = \frac{1}{3}\left(e^4 - \frac{1}{e^2}\right) = \frac{e^6-1}{3e^2}$

19) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \left[\ln\left(\left|u(x)\right|\right)\right]_0^1 = \left[\ln\left(\left|e^x+1\right|\right)\right]_0^1 = \left[\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1 = \ln(e+1) - \ln(2) = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$

20) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e u'(x)u(x)dx = \left[\frac{u^2(x)}{2}\right]_1^e = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}$

21) $\int_{\ln 3}^{\ln 10} e^x\left(e^x - 3\right)dx = \int_1^e u'(x)u(x)dx = \left[\frac{u^2(x)}{2}\right]_{\ln 3}^{\ln 10} = \left[\frac{\left(e^x-3\right)^2}{2}\right]_{\ln 3}^{\ln 10} = \frac{\left(e^{\ln 10}-3\right)^2}{2} - \frac{\left(e^{\ln 3}-3\right)^2}{2}$

$= \frac{(10-3)^2}{2} = \frac{49}{2}$

22) $\int_0^1 \frac{e^{-x}-2}{e^x}dx = \int_0^1 e^{-x}\left(e^{-x}-2\right)dx = \int_0^1 -u'(x)u(x)dx = -\left[\frac{u(x)^2}{2}\right]_0^1 = -\left[\frac{\left(e^{-x}-2\right)^2}{2}\right]_0^1$

$-\frac{\left(e^{-1}-2\right)^2}{2} + \frac{\left(e^0-2\right)^2}{2} = -\frac{\left(e^{-1}-2\right)^2}{2} + \frac{1}{2}$

23) $\int_{-1}^0 \frac{\ln(1-x)}{x-1}dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x-1}\ln(1-x)dx = \int_{-1}^0 -u'(x)u(x)dx = -\left[\frac{u(x)^2}{2}\right]_{-1}^0 = -\left[\frac{\left(\ln(1-x)\right)^2}{2}\right]_{-1}^0$

$= -\frac{\left(\ln(1-0)\right)^2}{2} + \frac{\left(\ln(2)\right)^2}{2} = \frac{\left(\ln(2)\right)^2}{2}$

Exercice n°2

1) $\boxed{\textbf{VRAI}}$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $x \to \int_5^x f(t)dt$ est LA PRIMITIVE de la fonction *f* qui a s'annule en 5, donc a pour dérivée *f*.

2) $\boxed{\textbf{FAUX}}$ car puisque *f* est une fonction continue et positive sur $[0;+\infty[$, alors l'intégrale $\int_5^x f(t)dt$ sera négative ou nulle pour tout $0 \le x \le 5$. En effet, si $0 \le x \le 5$, $\int_x^5 f(t)dt$ sera positive ou nulle, par positivité de l'intégrale,

et ainsi $\int_5^x f(t)dt = -\int_x^5 f(t)dt$ sera négative ou nulle

3) $\boxed{\textbf{FAUX !}}$ Cette formule est fantaisiste. Pour s'en convaincre, choisissons $f(x)=x$, $g(x)=x^2$, qui sont positives sur $[0;+\infty[$, ainsi que $a=0$, $b=1$. On a alors $\int_a^b f(x)g(x)dx \int_0^1 x^3dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$ tandis que $\int_a^b f(x)dx=\int_0^1 xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$ et $\int_a^b g(x)dx=\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$, donc $\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b g(x)dx\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$. Les résultats sont différents

4) On calcule $\int_0^\pi \sin x\cos xdx=\int_0^\pi \cos x\sin xdx==\int_0^\pi u'(x)u(x)dx$ où $u(x)=\sin x$. Ainsi $\int_0^\pi \sin x\cos xdx=\left[\frac{u^2(x)}{2}\right]_0^\pi=\frac{1}{2}\left((\sin\pi)^2-(\sin 0)^2\right)=\frac{1}{2}(0-0)=0$. L'affirmation est donc **VRAIE**

5) On calcule $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx=\int_1^e \frac{1}{x}\times(\ln x)^2dx=\int_1^e u'(x)\times u^2(x)dx$ où $u(x)=\ln x$. L'affirmation est donc **VRAIE**

Ainsi $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}dx=\left[\frac{(u(x))^3}{3}\right]_1^e=\left[\frac{(\ln(x))^3}{3}\right]_1^e=\frac{(\ln(e))^3}{3}-\frac{(\ln(1))^3}{3}=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}$.

6) On peut déjà écrire que $\int_0^{-\pi}\sin^4 xdx=-\int_{-\pi}^0 \sin^4 xdx$. Comme la fonction $x\to\sin^4 x$ est PAIRE sur $[-\pi;\pi]$, (puisque $(\sin(-x))^4=(-\sin(x))^4=(\sin(x))^4$), on a donc $\int_{-\pi}^0 \sin^4 xdx=\int_0^\pi \sin^4 xdx$. L'égalité proposée est donc **FAUSSE**

Exercice n°3

Puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1}{e^x+1}-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}$, on utilise cette dernière écriture pour calculer l'intégrale $I=\int_0^1\frac{1}{e^x+1}dx$.

En effet $I=\int_0^1 1-\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_0^1 1-\frac{u'(x)}{u(x)}dx=\left[x-\ln\left(\left|u(x)\right|\right)\right]_0^1=\left[x-\ln\left(\left|e^x+1\right|\right)\right]_0^1=\left[x-\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1$ car pour tout $x\in[0,1]$, $e^x+1>0$. On conclut donc que $I=1-\ln\left(e^1+1\right)-\left(0-\ln\left(e^0+1\right)\right)=1-\ln(e+1)+\ln 2=\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$

Exercice n°4

1) g est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $g'(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}-1=\ln x+1-1=\ln x$. g est donc une primitive de la fonction ln sur $]0;+\infty[$

2) On en déduit donc que $\int_1^e \ln xdx=\left[g(x)\right]_1^e=\left[x\ln x-x\right]_1^e=e\ln e-e-(\ln 1-1)=1$

Exercice n°5

1) Pour tout x de $]1;+\infty[$, $x+4+\frac{3}{x-1}=\frac{(x+4)(x-1)+3}{x-1}=\frac{x^2-x+4x-4+3}{x-1}=\frac{x^2+3x-1}{x-1}=f(x)$

2) Pour calculer l'intégrale $\int_4^2\frac{x^2+3x-1}{x-1}dx$, on utilise la transformation d'écriture précédente. Ainsi $\int_4^2\frac{x^2+3x-1}{x-1}dx=\int_4^2\left(x+4+\frac{3}{x-1}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+4x+3\ln|x-1|\right]_4^2=\left[\frac{x^2}{2}+4x+3\ln(x-1)\right]_4^2$ car pour tout $x\in[2,4]$, $x-1>0$. On conclut $\int_4^2\frac{x^2+3x-1}{x-1}dx=\frac{2^2}{2}+8+3\ln(2-1)-\left(\frac{4^2}{2}+16+3\ln(4-1)\right)=-14+3\ln(1)-3\ln 3=-14-3\ln 3$

Exercice n°6

1) Pour tout x de $\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$, $ax+b-\frac{c}{3x+2}=\frac{(ax+b)(3x+2)-c}{3x+2}=\frac{3ax^2+(2a+3b)x+2b-c}{3x+2}=f(x)$ si et seulement si $\begin{cases}3a=6\\2a+3b=13\\2b-c=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\3b=13-2\times2\\c=2b-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\\c=2\end{cases}$

Ainsi, pour tout x de $\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$, $f(x)=2x+3-\frac{2}{3x+2}$

2) Pour calculer $\int_0^2\frac{6x^2+13x+4}{3x+2}dx$, on utilise la transformation d'écriture ci-dessus

$$\int_0^2\frac{6x^2+13x+4}{3x+2}dx=\int_0^2\left(2x+3-\frac{2}{3x+2}\right)dx=\left[x^2+3x-\frac{2}{3}\ln\left(\left|3x+2\right|\right)\right]_0^2$$

$$=2^2+3\times2-\frac{2}{3}\ln\left(\left|3\times2+2\right|\right)-\left(0^2+3\times0-\frac{2}{3}\ln\left(\left|3\times0+2\right|\right)\right)=10-\frac{2}{3}\ln8+\frac{2}{3}\ln2=10+\frac{2}{3}\ln\frac{2}{8}$$

Exercice n°7

1) Déterminons les racines du trinôme $P(x)=x^2-5x+6$ en calculant son discriminant $\Delta=(-5)^2-4\times1\times6=25-24=1$. Le trinôme admet donc deux racines réelles distinctes $x_1=\frac{5-\sqrt{1}}{2}=2$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{1}}{2}=3$. Le signe de $P(x)=x^2-5x+6$ est donné par :

x		2		3	
$P(x)=x^2-5x+6$	$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi,

Pour tout $x\in\left]-\infty;2\right]\cup\left[3;+\infty\right[$, $x^2-5x+6\geq0$

Pour tout $x\in[2;3]$, $x^2-5x+6\leq0$

2) En utilisant la relation de Chasles, on écrit $\int_0^7\left|x^2-5x+6\right|dx=\int_0^2\left|x^2-5x+6\right|dx+\int_2^3\left|x^2-5x+6\right|dx+\int_3^7\left|x^2-5x+6\right|dx$

Pour tout $x\in\left]-\infty;2\right]\cup\left[3;+\infty\right[$, $x^2-5x+6\geq0$ donc $\left|x^2-5x+6\right|=x^2-5x+6$

Pour tout $x\in[2;3]$, $x^2-5x+6\leq0$ donc $\left|x^2-5x+6\right|=-\left(x^2-5x+6\right)=-x^2+5x-6$

La somme $\int_0^2\left|x^2-5x+6\right|dx+\int_2^3\left|x^2-5x+6\right|dx+\int_3^7\left|x^2-5x+6\right|dx$ se réécrit donc

$$\int_0^2\left(x^2-5x+6\right)dx+\int_2^3\left(-x^2+5x-6\right)dx+\int_3^7\left(x^2-5x+6\right)dx$$

En utilisant les deux primitives $F(x)=\frac{x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}+6x$ et $G(x)=-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}-6x$, on calcule séparément :

$$\int_0^2\left(x^2-5x+6\right)dx=F(2)-F(0)=\frac{2^3}{3}-5\frac{2^2}{2}+12-\left(\frac{0^3}{3}-5\frac{0^2}{2}+0\right)=\frac{14}{3}$$

$$\int_2^3\left(-x^2+5x-6\right)dx=G(3)-G(2)=\left(-\frac{3^3}{3}+5\frac{3^2}{2}-18\right)-\left(-\frac{2^3}{3}+5\frac{2^2}{2}-12\right)=-25+\frac{45}{2}+\frac{8}{3}$$

$$\int_3^7\left(x^2-5x+6\right)dx=F(7)-F(3)=\left(\frac{7^3}{3}-5\frac{7^2}{2}+42\right)-\left(\frac{3^3}{3}-5\frac{3^2}{2}+18\right)=\frac{343}{3}-85$$

Au final, la valeur de l'intégrale est $\frac{14}{3}-25+\frac{45}{2}+\frac{8}{3}+\frac{343}{3}-85=\frac{365}{3}+\frac{45}{2}-110$

Exercice n°8

1) Puisque pour tout réel x, $1+x^2>0$, f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=-\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$. $f'(x)$ étant du même signe que $-2x$, on en déduit que pour tout $x\in\left]-\infty;0\right[$, $f'(x)>0$ et que pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $f'(x)<0$. f est donc strictement croissante sur $\left]-\infty;0\right]$ et strictement décroissante sur $\left[0;+\infty\right[$

2) On doit distinguer deux cas : Si $x\in[-1;0]$, cela signifie que $-1\leq x\leq 0$. Comme f est strictement croissante sur $\left]-\infty;0\right]$, on en déduit que $f(-1)\leq f(x)\leq f(0)$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{2}\leq f(x)\leq 1$. Si $x\in[0;2]$, cela signifie que $0\leq x\leq 2$. Comme f est strictement décroissante sur $\left[0;+\infty\right[$, on en déduit que $f(0)\geq f(x)\geq f(2)$, c'est-à-dire $1\geq f(x)\geq\dfrac{1}{5}$. Finalement, pour tout x de [-1;2], $\dfrac{1}{5}\leq f(x)\leq 1$

3) On « passe aux intégrales » dans l'inégalité. Si pour tout x de [-1;2], $\dfrac{1}{5}\leq f(x)\leq 1$, alors $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{1}{5}dx\leq\int_{-1}^{2}f(x)dx\leq\int_{-1}^{2}1dx$

On calcule séparément $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{1}{5}dx=\left[\frac{1}{5}x\right]_{-1}^{2}=\frac{2}{5}-\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{5}$ et $\displaystyle\int_{-1}^{2}1dx=[x]_{-1}^{2}=2-(-1)=3$, ce qui nous permet de conclure finalement que $\displaystyle\frac{3}{5}\leq\int_{-1}^{2}\frac{1}{1+x^2}dx\leq 3$

Exercice n°9

Pour tout $x\in[0,1]$, $\sin x\geq 0$ et $x^2\leq x$, donc $x^2\sin x\leq x\sin x$

On « passe aux intégrales » dans l'inégalité. Ainsi $\displaystyle\int_{0}^{1}x^2\sin x dx\leq\int_{0}^{1}x\sin x dx$

Exercice n°10

La valeur moyenne sur [0;2] de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$ est égale à $\displaystyle\frac{1}{2-0}\int_{0}^{2}x^3dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{16}{4}-\frac{0}{4}\right]=2$

La valeur moyenne sur [1;3] de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$ est égale à $\displaystyle\frac{1}{3-1}\int_{1}^{3}x^3dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{1}^{3}=\frac{1}{2}\left[\frac{81}{4}-\frac{1}{4}\right]=10$

La valeur moyenne sur [-1;1] de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3$ est égale à $\displaystyle\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1}x^3dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}-\frac{(-1)^4}{4}\right]=0$

Exercice n°11

1) $\displaystyle I=\int_{-1}^{0}xe^x dx=\int_{-1}^{0}u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=x\Rightarrow u'(x)=1$ et $v'(x)=e^x\Rightarrow v(x)=e^x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$I=\left[u(x)v(x)\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}u'(x)v(x)dx=\left[xe^x\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}1\times e^x dx=0-(-1)e^{-1}-\left[e^x\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{e}-\left(1-\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e}-1$$

2) $\displaystyle I=\int_{-1}^{0}(x+2)e^x dx=\int_{-1}^{0}u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=x+2\Rightarrow u'(x)=1$ et $v'(x)=e^x\Rightarrow v(x)=e^x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$I=\left[u(x)v(x)\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}u'(x)v(x)\,dx=\left[(x+2)e^{x}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}1\times e^{x}dx=2-(1)e^{-1}-\left[e^{x}\right]_{-1}^{0}=2-\frac{1}{e}-\left(1-\frac{1}{e}\right)=1$$

3) $I=\int_{-1}^{0}(x+2)e^{x+1}dx=\int_{-1}^{0}u(x)v'(x)\,dx$ où $u(x)=x+2\Rightarrow u'(x)=1$ et $v'(x)=e^{x+1}\Rightarrow v(x)=e^{x+1}$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$I=\left[u(x)v(x)\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}u'(x)v(x)\,dx=\left[(x+2)e^{x+1}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}1\times e^{x+1}dx=2e-(1)e^{0}-\left[e^{x+1}\right]_{-1}^{0}=2e-1-(e-1)=e$$

4) $I=\int_{1}^{e}x\ln x\,dx=\int_{1}^{e}u(x)v'(x)\,dx$ où $u(x)=\ln x\Rightarrow u'(x)=\frac{1}{x}$ et $v'(x)=x\Rightarrow v(x)=\frac{x^2}{2}$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$I=\left[u(x)v(x)\right]_{1}^{e}-\int_{1}^{e}u'(x)v(x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_{1}^{e}-\int_{1}^{e}\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2}dx=\frac{e^2}{2}\ln e-\frac{1^2}{2}\ln 1-\left[\frac{x^2}{4}\right]_{1}^{e}=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$$

5) $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}u(x)v'(x)\,dx$ où $u(x)=x\Rightarrow u'(x)=1$ et $v'(x)=\sin x\Rightarrow v(x)=-\cos x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$I=\left[u(x)v(x)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}u'(x)v(x)\,dx=\left[-x\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}1\times(-\cos x)\,dx=0+0+\left[\sin x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=1$$

<u>Exercice n°12</u>

1) En réduisant au même dénominateur : Pour tout t strictement positif,

$\frac{at^{n-1}+b}{t^n+1}+\frac{c}{t}=\frac{t\left(at^{n-1}+b\right)+c\left(t^n+1\right)}{t\left(t^n+1\right)}=\frac{(a+c)t^n+bt+c}{t\left(t^n+1\right)}=\frac{1}{t\left(t^n+1\right)}$, si et seulement si, par identification,

$\begin{cases}a+c=0\\b=0\\c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=0\\c=1\end{cases}$. Ainsi, pour tout t strictement positif, $\boxed{\frac{1}{t\left(t^n+1\right)}=\frac{-t^{n-1}}{t^n+1}+\frac{1}{t}}$

2) On utilise l'écriture $f_n(t)=\frac{-t^{n-1}}{t^n+1}+\frac{1}{t}$ pour calculer l'intégrale :

$$\int_{1}^{2}f_n(t)\,dt=\int_{1}^{2}\left(\frac{-t^{n-1}}{t^n+1}+\frac{1}{t}\right)dt=\left[-\frac{1}{n}\ln\left(t^n+1\right)+\ln(t)\right]_{1}^{2}=-\frac{1}{n}\ln\left(2^n+1\right)+\ln(2)+\frac{1}{n}\ln\left(1^n+1\right)+\ln(1)$$

$$=\frac{1}{n}\ln\left(1^n+1\right)-\frac{1}{n}\ln\left(2^n+1\right)+\ln(2)=\ln\left[\left(\frac{2}{2^n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\right]+\ln\left(\left(2^n\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\boxed{\ln\left(\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2^n+1}}\right)}$$

3) On pose $u(t)=\ln t\Rightarrow u'(t)=\frac{1}{t}$ et $v'(t)=\frac{t^{n-1}}{\left(t^n+1\right)^2}=\frac{1}{n}\frac{w'(t)}{w^2(t)}$ où $w(t)=t^n+1$, donc

$v(t)=-\frac{1}{nw(t)}=-\frac{1}{n\left(t^n+1\right)}$, et ainsi : $\int_{1}^{2}\frac{t^{n-1}\ln t}{\left(t^n+1\right)^2}dt=\int_{1}^{2}u(t)v'(t)\,dt=\left[u(t)v(t)\right]_{1}^{2}-\int_{1}^{2}u'(t)v(t)\,dt$

$$=\left[-\frac{\ln t}{n\left(t^n+1\right)}\right]_{1}^{2}-\int_{1}^{2}\frac{1}{t}\times\left(-\frac{1}{n\left(t^n+1\right)}\right)dt=-\frac{\ln 2}{n\left(2^n+1\right)}+\frac{1}{n}\int_{1}^{2}\frac{1}{t\left(t^n+1\right)}dt=\boxed{-\frac{\ln 2}{n\left(2^n+1\right)}+\frac{1}{n}\ln\left(\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2^n+1}}\right)}$$

Exercice n°13

1) Pour n=0, on doit calculer $I_0=\int_0^1 \frac{t^0}{0!}e^{1-t}dt$. En convenant que 0 !=1, et puisque pour tout t>0, $t^0=1$ (on convient que $0^0=1$) le calcul est donc $I_0=\int_0^1 e^{1-t}dt=\left[-e^{1-t}\right]_0^1=-e^0+e^1\boxed{=e-1}$

Pour n=1, on doit calculer $I_1=\int_0^1 \frac{t^1}{1!}e^{1-t}dt=\int_0^1 te^{1-t}dt=\int_0^1 u(t)v'(t)dt$ avec $u(t)=t\Rightarrow u'(t)=1$ et $v'(t)=e^{1-t}\Rightarrow v(t)=-e^{1-t}$ qui sont continûment dérivables sur [0 ;1].

Ainsi $I_1=\left[u(t)v(t)\right]_0^1-\int_0^1 u'(t)v(t)dt=\left[-te^{1-t}\right]_0^1+\int_0^1 e^{1-t}dt=-1\times e^0+0\times e^1+I_0=-1+(e-1)\boxed{=e-2}$

2) Pour tout entier n non nul, $I_n=\int_0^1 \frac{t^n}{n!}e^{1-t}dt=\int_0^1 u(t)v'(t)dt$ avec $u(t)=\frac{t^n}{n!}\Rightarrow u'(t)=\frac{nt^{n-1}}{n!}=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ et $v'(t)=e^{1-t}\Rightarrow v(t)=-e^{1-t}$ qui sont continûment dérivables sur [0 ;1]. Ainsi $I_n=\left[u(t)v(t)\right]_0^1-\int_0^1 u'(t)v(t)dt$ $=\left[-\frac{t^n}{n!}e^{1-t}\right]_0^1+\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{1-t}dt=-\frac{1}{n!}+\frac{0^n}{n!}e^{1-0}+I_{n-1}$ d'où la relation $\boxed{I_n-I_{n-1}=-\frac{1}{n!}}$

3) Montrons par récurrence que pour tout entier n , $I_n=e-\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}$. Notons $Q(k)$ la propriété « $I_k=e-\sum_{p=0}^{k}\frac{1}{p!}$ »

Initialisation : La propriété est vraie pour k=0 car $e-\sum_{p=0}^{0}\frac{1}{p!}=e-\frac{1}{0!}=e-1$ (par convention 0 !=1), et puisqu'on a calculé $I_0=e-1$ dans la question 1)

Hérédité : Supposons la propriété vraie $Q(m)$ pour un entier m fixé, à savoir $I_m=e-\sum_{p=0}^{m}\frac{1}{p!}$.

On a alors, d'après la question 2), $I_{m+1}=I_m-\frac{1}{(m+1)!}$, donc en appliquant l'hypothèse de récurrence, $I_{m+1}=e-\sum_{p=0}^{m}\frac{1}{p!}-\frac{1}{(m+1)!}=e-\sum_{p=0}^{m+1}\frac{1}{p!}$, ce qui est la propriété à l'ordre m+1, et achève donc la phase d'hérédité, et la démonstration par récurrence. La propriété $I_n=e-\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}$ est vraie pour tout entier n

4) Posons, pour tout entier n non nul, $f_n(t)=t^ne^{1-t}$. Pour tout entier n non nul, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout t réel, $f_n'(t)=nt^{n-1}e^{1-t}-t^ne^{1-t}=t^{n-1}e^{1-t}(n-t)$. Si n est un entier non nul, donc supérieur à 1, on peut affirmer que pour tout $t\in[0,1]$, $f_n'(t)=t^{n-1}e^{1-t}(n-t)\geq 0$, donc que f_n est croissante sur [0 ;1]. Elle atteint donc son maximum lorsque t=1, lequel maximum vaut $f_n(1)=1^ne^{1-1}=1$. Ainsi, on peut affirmer que pour tout $t\in[0,1]$, $f_n(t)\leq 1$. On passe aux inégalités dans l'intégrale. Ainsi $I_n=\int_0^1 \frac{t^n}{n!}e^{1-t}dt\leq\int_0^1 \frac{1}{n!}dt\leq\frac{1}{n!}(1-0)$. L'inégalité $I_n\leq\frac{2}{n!}$ (et même $I_n\leq\frac{1}{n!}$!) est donc vérifiée pour tout n non nul. Enfin, puisque pour tout $t\in[0,1]$, $f_n(t)=t^ne^{1-t}>0$, l'inégalité $I_n\geq 0$ est vérifiée par positivité de l'intégrale d'une fonction positivie. Ainsi, pour tout entier naturel n non nul, $\boxed{0\leq I_n\leq\frac{2}{n!}}$

5) Puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n!}=0$, le théorème d'encadrement « des gendarmes » nous permet de conclure que $\boxed{\lim_{n\to+\infty}I_n=0}$ (ce qui permet, au passage, d'établir le résultat $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}=e}$)

Exercice n°14

1) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=x^2 \Rightarrow u'(x)=2x$ et $v'(x)=\sin x \Rightarrow v(x)=-\cos x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$I=\left[u(x)v(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)dx=\left[x^2\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\times(-\cos x)dx=0-0+\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x dx$$

On calcule l'intégrale $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x dx$ en effectuant une deuxième intégration par parties :

$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=2x \Rightarrow u'(x)=2$ et $v'(x)=\cos x \Rightarrow v(x)=\sin x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$J=\left[u(x)v(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x)v(x)dx=\left[2x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\times\cos x dx=\pi-0-2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2$. Finalement, $\boxed{I=\pi-2}$

2) $I=\int_0^{\pi} e^x \sin x dx=\int_0^{\pi} u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=e^x \Rightarrow u'(x)=e^x$ et $v'(x)=\sin x \Rightarrow v(x)=-\cos x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$I=\left[u(x)v(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} u'(x)v(x)dx=\left[-e^x\cos x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} e^x\times(-\cos x)dx=e^{\pi}+1+\int_0^{\pi} e^x\cos x dx$$

On calcule $J=\int_0^{\pi} e^x\cos x dx$ en effectuant une deuxième intégration par parties :

$J=\int_0^{\pi} e^x\cos x dx=\int_0^{\pi} u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=e^x \Rightarrow u'(x)=e^x$ et $v'(x)=\cos x \Rightarrow v(x)=\sin x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$J=\left[u(x)v(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} u'(x)v(x)dx=\left[e^x\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} e^x\sin x dx=0-0-I$$

On aboutit donc à l'équation $I=e^{\pi}+1-I$ c'est-à-dire $2I=e^{\pi}+1$ et on conclut ainsi que $\boxed{I=\frac{e^{\pi}+1}{2}}$

3) $I=\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x dx=\int_0^{\pi} u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=e^{2x} \Rightarrow u'(x)=2e^{2x}$ et $v'(x)=\cos x \Rightarrow v(x)=\sin x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$I=\left[u(x)v(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} u'(x)v(x)dx=\left[e^{2x}\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} 2e^{2x}\sin x dx=0-0-\int_0^{\pi} 2e^{2x}\sin x dx$$

On calcule $J=\int_0^{\pi} 2e^{2x}\sin x dx$ en effectuant une deuxième intégration par parties :

$J=\int_0^{\pi} 2e^{2x}\sin x dx=\int_0^{\pi} u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=2e^{2x} \Rightarrow u'(x)=4e^{2x}$ et $v'(x)=\sin x \Rightarrow v(x)=-\cos x$ sont continûment dérivables. D'après la formule d'intégration par parties,

$$J=\left[u(x)v(x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} u'(x)v(x)dx=\left[-2e^{2x}\cos x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} 4e^{2x}(-\cos x)dx=2e^{2\pi}+2+4\int_0^{\pi} e^{2x}\cos x dx=2e^{2\pi}+2+4I$$

On aboutit donc à l'équation $I=-2e^{2\pi}-2-4I$ c'est-à-dire $5I=-2e^{2\pi}-2$ et on conclut ainsi que $\boxed{I=-\frac{2}{5}\left(e^{2\pi}+1\right)}$