CALCUL INTEGRAL

1) Notion d'intégrale – Définitions

Définition :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, et a et b deux nombres de cet intervalle.

Si F est une primitive de f sur I, on définit l'intégrale de f entre a et b comme étant le nombre réel $\boxed{F(b)-F(a)}$

et on note $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$. (on lit « somme (ou intégrale) de a à b de $f(x)dx$ »)

Remarques :

1) L'intégrale de f entre a et b est un nombre réel.
2) Ce nombre **ne dépend pas de la primitive choisie pour *f*.**
   En effet, soit G une autre primitive de f. Il existe un nombre réel k tel que pour tout $x \in I$, on a $G(x) = F(x) + k$.
   Le calcul de l'intégrale donne alors $\int_a^b f(x) \quad dx = G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$
3) L'élément « dx » que l'on trouve dans l'expression de l'intégrale signifie que l'on prend la primitive (c'est à dire que l'on « intègre ») par rapport à la variable x. Ceci a une importance lorsqu'on travaille avec des fonctions de plusieurs variables.
   On aurait très bien pû écrire $\int_a^b f(t)\,dt$ ou $\int_a^b f(u)\,du$. On peut employer n'importe quelle lettre, à l'exclusion des lettres a,b et f. On dit que cette variable est "muette".
4) On écrit souvent le réel $F(b) - F(a)$ sous forme condensée $[F(x)]_a^b$.
   Ainsi, on note $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

2) Propriétés de l'intégrale

Propriété :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a et b deux nombres de cet intervalle.

Alors $\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$ et $\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)dx}$

Preuve :

Si F est une primitive de f sur I, on a alors $\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$

et $\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b) = -\big(F(b) - F(a)\big) = -\int_a^b f(x)\,dx$

Relation de Chasles

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, a,b et c trois nombres réels de cet intervalle.

Alors $\boxed{\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx}$

Preuve :

Si F est une primitive de f sur I, on a alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)\,dx$$

Propriété (linéarité de l'intégrale) :

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I, et a et b deux nombres de cet intervalle.

Alors $\boxed{\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx}$. De plus, pour tout nombre réel k, $\boxed{\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx}$

Preuve :

Si F et G sont les primitives f et g sur I, la fonction $F+G : x \to F(x)+G(x)$ est une primitive de la fonction $f+g : x \to f(x)+g(x)$ sur I, ce qui permet d'écrire :

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \left(F(b)+G(b)\right) - \left(F(a)+G(a)\right) = F(b) - F(a) - \left(G(b) - G(a)\right) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

De plus, pour tout nombre réel k , la fonction $kF : x \to kF(x)$ est une primitive de la fonction $kf : x \to kf(x)$ sur I, ce qui permet d'écrire : $\int_a^b kf(x)\,dx = \left[kF(x)\right]_a^b = kF(b) - kF(a) = k\left(F(b) - F(a)\right) = k\int_a^b f(x)\,dx$

Propriété : (Signe de l'intégrale)

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, a et b deux nombres réels de cet intervalle, avec $a \le b$

Si pour tout $x \in I,\ f(x) \ge 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \ge 0$. Si pour tout $x \in I,\ f(x) \le 0$, alors $\int_a^b f(x)dx \le 0$

Preuve :

Si F est une primitive de f sur I, et si pour tout $x \in I$, $f(x) \ge 0$ alors ceci signifie que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x) \ge 0$. La fonction F est donc croissante sur I. Puisque $a \le b$, on a alors $F(a) \le F(b)$, c'est-à-dire $F(b) - F(a) \ge 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$. La démonstration est identique dans le cas d'une fonction f négative sur I

Conséquence : comparaison d'intégrales

Propriété :

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle I, et a et b deux nombres de cet intervalle, avec $a \le b$. Si pour tout $x \in I,\ f(x) \le g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

Preuve :

Si pour tout $x \in I$, $f(x) \le g(x)$, alors pour tout $x \in I$, $f(x) - g(x) \le 0$. On applique le théorème précédent :

On aura $\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx \le 0$, mais puisque $\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$, on en concluera que $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \le 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$. CQFD

Conséquence : Inégalités de la moyenne

Propriété :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, et a et b deux nombres de cet intervalle, avec $a \le b$.
S'il existe deux nombres réels m et M tels que pour tout $x \in [a;b]$ on ait $m \le f(x) \le M$, alors

$$\boxed{m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)}$$

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, et a et b deux nombres de cet intervalle, (sans avoir nécessairement $a \le b$). S'il existe un réel M positif tel que pour tout $x \in [a;b]$ (ou $x \in [b;a]$), on ait $|f(x)| \le M$ alors $\boxed{\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M|b-a|}$

Preuve :

Si pour tout $x \in [a;b]$ on a $m \le f(x) \le M$, alors on applique deux fois la propriété précédente :

On aura $\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx$. Mais puisque $\int_a^b mdx = [mx]_a^b = mb - ma = m(b-a)$ et de même $\int_a^b Mdx = M(b-a)$, on trouve le résultat annoncé.

S'il existe un réel M positif tel que pour tout $x \in [a;b]$ (ou $x \in [b;a]$), on ait $|f(x)| \le M$, alors cela signifie que : Pour tout $x \in [a;b]$ (ou $x \in [b;a]$), $-M \le f(x) \le M$. On applique le résultat précédent :

Pour tout $x \in [a;b]$ (ou $x \in [b;a]$), $-M(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$. Ceci entraine que $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M|b-a|$

Valeur moyenne d'une fonction

Définition :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, et a et b deux nombres de cet intervalle, avec $a < b$.

On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le réel $\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$

Remarques : L'intervalle sur lequel est calculé la valeur moyenne est indissociable de l'expression
L'expression seule « valeur moyenne » n'a pas de sens.

Intégration par parties

Théorème :

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et telles que leurs dérivées f' et g' soient continues sur I. Alors pour tous réels a et b de I :

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx}$$

Démonstration :

Si f et g sont dérivables sur I, alors leur produit l'est également et pour tout $x \in I$, $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Puisque les fonctions f et g sont dérivables donc continues sur I, ainsi que les fonctions f' et g' (par hypothèse), il en est de même des fonctions $x \to f'(x)g(x)$ et $x \to f(x)g'(x)$

Pour tous réels a et b de I, on aura alors $\int_a^b \left(f(x)g(x)\right)'dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Puisque $\int_a^b \left(f(x)g(x)\right)'dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b$, on aboutit au résultat.

Primitive définie par une intégrale
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, et a un réel de I.

La fonction G définie sur I par $G(x)=\int_a^x f(t)dt$ est **la** primitive de f sur I qui s'annule en a.

Preuve :

Si F est une primitive de f sur I, alors pour tout $x\in I$, $G(x)=\int_a^x f(t)dt=\left[F(t)\right]_a^x=F(x)-F(a)$, ce qui prouve que G est une primitive de f sur I (car deux primitives diffèrent d'une constante)

De plus $G(a)=\int_a^a f(t)dt=0$ ce qui achève la démonstration.

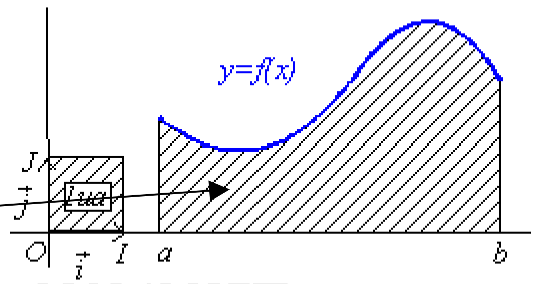
3) Calculs de grandeurs à l'aide d'intégrales

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$ avec $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$.

L'unité d'aire sera $OI\times OJ$, aire du rectangle ayant pour côtés les segments $[OI]$ et $[OJ]$.
On considère une fonction f continue sur un intervalle I, et a et b deux réels de I avec $a\le b$

Propriété :

Si pour tout $x\in[a;b]$, $f(x)\ge 0$, $\int_a^b f(x)dx$ désigne l'aire, exprimée en unités d'aires du domaine constitué des points $M(x;y)$ vérifiant $\begin{cases} a\le x\le b \\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$

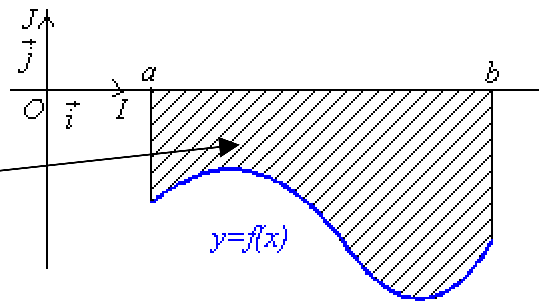


Preuve :
On a déjà vu, dans le paragraphe 2 que la fonction $t\to A(t)$ où $A(t)$ est l'aire du domaine $D_t=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / a\le x\le t\ ,\ 0\le y\le f(x)\right\}$ était la primitive de f sur I qui s'annule en a.
Si F est une primitive quelconque de f, on a alors : Pour tout $t\in I$, $A(t)=F(t)-F(a)$

Ainsi $A(b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$, ce qui démontre le résultat.

Propriété :

Si pour tout $x\in[a;b]$, $f(x)\le 0$, $\int_a^b f(x)dx$ est égale à l'opposé de l'aire, exprimée en unités d'aires du domaine constitué des points $M(x;y)$ vérifiant $\begin{cases} a\le x\le b \\ f(x)\le y\le 0\end{cases}$



Preuve :
Si $f\le 0$ sur [a;b], alors $-f\ge 0$ sur $[a;b]$, et si F est une primitive de f sur $[a;b]$, alors $-F$ est une primitive de $-f$ sur $[a;b]$. Ainsi l'aire du domaine $D_b=\left\{(x;y)\in R^2 / a\le x\le b, 0\le y\le f(x)\right\}$ est égale à :
$-F(b)-(-F(a))=-(F(b)-F(a))=-aire\, D_b$

Cas d'une fonction de signe quelconque sur $[a;b]$
Propriété :

Si f est de signe quelconque sur $[a;b]$, $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ est égale à la somme des aires algébriques de f sur chacun des n intervalles $[a_1;b_1]$, $[a_2;b_2]$,....$[a_n;b_n]$ sur lesquels f est de signe constant.

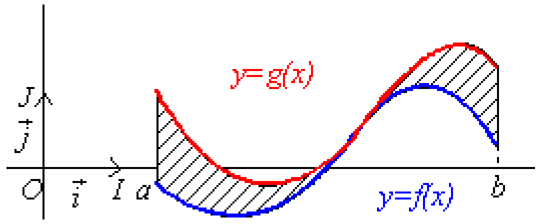
Preuve :

Il suffit d'utiliser la relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} f(x)\,dx$

Sur chacun des intervalles $[a_i;b_i]$, si $f(x) \geq 0$, $\int_{a_i}^{b_i} f(x)\,dx$ =aire(D_i), et si $f(x) \leq 0$, $\int_{a_i}^{b_i} f(x)\,dx$ = - aire(D_i)

Théorème :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$.
Lorsque $f \leq g$ sur l'intervalle I, c'est à dire que pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$, l'aire du domaine délimité par les courbes C_f et C_g, et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est égale à $\boxed{\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx}$



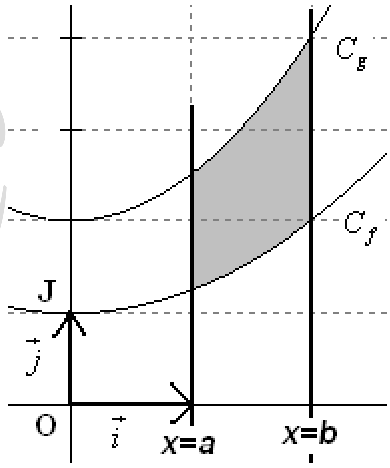
Le domaine peut être décrit comme l'ensemble des points M(x ;y) tels que :

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$$

Démonstration :

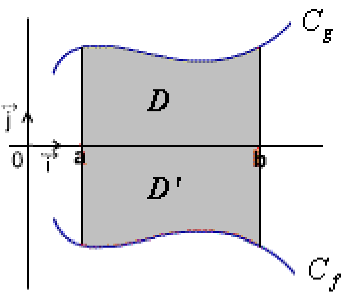
Quitte à utiliser la relation de Chasles, et à additionner plusieurs aires, on peut se placer sur un intervalle sur lequel chacune des fonctions f et g ne change pas de signe.
De deux choses l'une :

- Ou bien les fonctions f et g sont de même signe, par exemple positifs sur I



Alors l'aire du domaine délimité par les courbes C_f et C_g, et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ s'obtient par soustraction des deux aires $\int_a^b g(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt$ (car les fonctions sont positives)
Par linéarité de l'intégrale, on obtient le résultat attendu.

- Ou bien les fonctions f et g sont de signe contraire
Supposons par exemple que sur pour tout $x \in I$, $f(x) \leq 0$ et $0 \leq g(x)$
Alors l'aire du domaine délimité par les courbes C_f et C_g, et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ s'obtient par addition des deux aires D et D'
Mais puisque pour tout $x \in I$, $f(x) \leq 0$, l'aire du domaine D' vaut $-\int_a^b f(t)\,dt$ et puisque pour tout $x \in I$, $0 \leq g(x)$, l'aire du domaine D vaut $\int_a^b g(t)\,dt$, on obtient le résultat attendu par addition.



Calcul de volumes

L'espace est rapporté à un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ avec $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$, $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$ et $\vec{k}=\overrightarrow{OK}$

L'unité de volume sera $OI\times OJ\times OK$,volume du parallélépipède ayant de côtés les segments [OI],[OJ] et [OK]

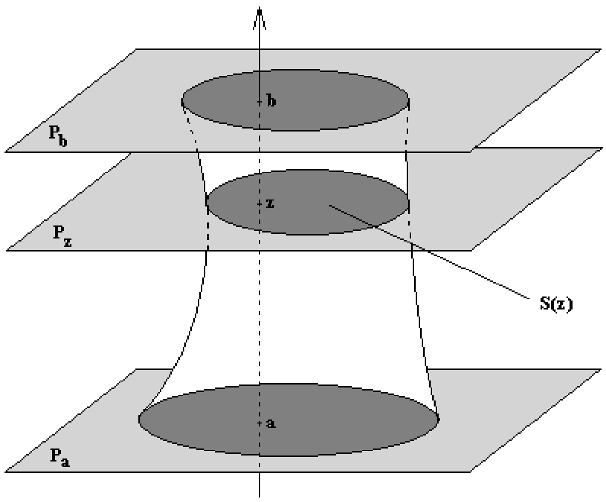
Théorème :

On suppose que la section du domaine D de l'espace par un plan (P) parallèle à xOy de cote z a une aire $S(z)$ connue qui soit une fonction continue de z alors le volume du domaine D compris entre les plans de cotes respectives a et b est

$$\boxed{V(D)=\int_a^b S\left(z\right)dz}$$

Remarque :

On obtient des résultats analogues avec des plans parallèles à yOz ou parallèles à xOy.



Cas particulier du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses d'un domaine limité par une courbe $y = f(x)$.

Théorème :

Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $\left[a;b\right]$ et (E) l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $a\le x\le b$ et $0\le y\le f\left(x\right)$ alors le volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses par le domaine *(E)* est $V(E)=\pi\int_a^b\left[f\left(x\right)\right]^2dx$