PRIMITIVES - COURS

Si f est une fonction dérivable, on sait calculer sa fonction dérivée f ‘

On peut aussi considérer que toute fonction pourrait être vue comme la dérivée d’une autre.

1) Définition et premières propriétés

Si f est une fonction définie sur un intervalle I, on appelle Primitive de f de I toute fonction F définie et dérivable sur I, telle que : pour tout $x \in I$, $\boxed{F'(x) = f(x)}$

Remarques :

1) Les mots « Primitive de f de I » sont indissociables.

2) La nécessité de ne travailler que sur un intervalle I se justifiera par la suite.

3) Il n’est pas, pour le moment, assuré de l’existence d’une primitive.

Notation : Il est d'usage de noter une fonction par une lettre minuscule et une primitive de cette fonction par la lettre majuscule correspondante.

Exemples :

La fonction F : $x \mapsto x^2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f : $x \mapsto 2x$

La fonction G : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une primitive sur $]-\infty;0[$ ou sur $]-\infty;0[$ de la fonction g : $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$

La fonction H : $x \mapsto \sqrt{x}$ est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction h : $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Propriété :

Si une fonction admet une primitive F sur un intervalle I, alors elle admettra une infinité d’autres primitives G sur I définies par : Pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$ où k est un réel quelconque. On dit que toutes les primitives d’une focntion sont définies « à une constante près »

Preuve :

Soit F et G sont deux primitives d’une même fonction f sur un intervalle I .

On a donc : Pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = f(x)$.

Par soustraction, on obtient : Pour tout $x \in I$, $G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Par ailleurs, pour tout $x \in I$, $G'(x) - F'(x) = (G - F)'(x) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in I$, $(G - F)'(x) = 0$

La fonction $G - F : x \mapsto G(x) - F(x)$ est donc constante sur I.

Il existe donc un réel k tel que pour tout $x \in I$, on ait $G(x) - F(x) = k \Leftrightarrow G(x) = F(x) + k$. CQFD

Réciproquement, si F est une primitive de f sur I, et s’il existe un réel k tel que pour tout $x \in I$, on ait $G(x) = F(x) + k$, alors $G'(x) = F'(x) + k = f(x) + 0 = f(x)$

Exemples :

La fonction F : $x \mapsto x^2 + 3$ est une autre primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f : $x \mapsto 2x$

Les fonctions $x \mapsto x^2 + 7$ ou $x \mapsto x^2 + \sqrt{\pi}$ le sont également

Remarque :
Le résultat est faux si I n'est pas un intervalle.
Par exemple, sur $\mathbb{R}^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, les fonctions $x \mapsto \frac{1+|x|}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont deux primitives de $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$, mais leur différence n'est pas constante.

Par lecture inverse du tableau des primitives, on peut donc dresser un tableau des primitives

Problématique :

Peut-on être sûr que toutes les fonctions admettent une primitive, même s'il est difficile voire impossible d'en trouver une expression ?

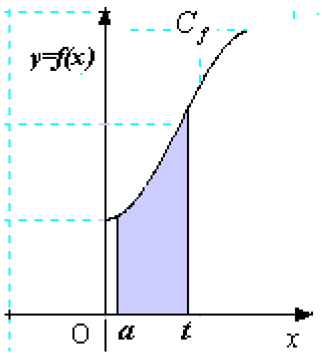
Par exemple, nul ne connaît une expression littérale de la primitive de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$

2) Condition suffisante d'existence

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors f admet une (et donc une infinité) de primitives sur I.

Démonstration
Commençons par démontrer l'existence d'une primitive dans le cas d'une fonction positive monotone croissante sur I.
Le théorème se généralise ensuite.
Soit f une fonction continue, positive, monotone croissante sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan.

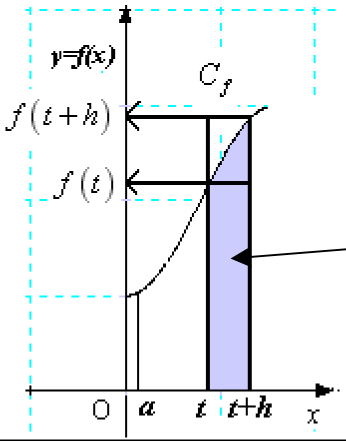


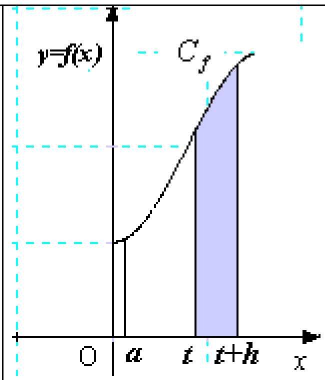
Soit $a \in I$.
On considère la fonction A, définie sur I, qui à tout $t \in I$ associe l'aire du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = t$
Ce domaine peut être décrit comme l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que :

$$\begin{cases} a \le x \le t \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$$

Alors la fonction $t \mapsto A(t)$ est la primitive de f s'annulant en a.

En effet, il est évident que $A(a)=0$.
Soit $t\in I$ avec $t>a$ et soit $h>0$.
On s'intéresse à $A(t+h)-A(t)$, l'aire du domaine délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=t$ et $x=t+h$.





Puisque f est strictement croissante sur I, cette aire peut être encadrée par celles des deux rectangles de largeur $t+h-t=h$ et de longueurs respectives $f(t)$ et $f(t+h)$

On a donc :

$$hf(t)\le A(t+h)-A(t)\le hf(t+h)\Leftrightarrow f(t)\le\frac{A(t+h)-A(t)}{h}\le f(t+h)\ \text{(car } h>0\text{)}$$

Puisque f est continue en t, on a $\lim\limits_{\substack{h\to0\\h>0}} f(t+h)=f(t)$, et en appliquant le théorème des gendarmes, on obtient :

$\lim\limits_{\substack{h\to0\\h>0}}\dfrac{A(t+h)-A(t)}{h}=f(t)$. La fonction A est donc dérivable à droite et $A'_d(t)=f(t)$.

De même (en prenant $h<0$), on montre que la fonction A est dérivable à gauche en tout point $t\in I$, et que $A'_g(t)=f(t)$

Extensions :
Le théorème s'étend au cas
- d'une fonction continue monotone décroissante (le rectangle de plus grande aire est alors celui de hauteur $f(t)$)
- d'une fonction continue négative et monotone sur I : en effet, si $f\le0$ sur I, alors $-f\ge0$ sur I, et si F est une primitive de f sur I, alors $-F$ est une primitive de $-f$ sur I.
- d'une fonction non monotone sur I : On divise alors I en n intervalles I_1, $I_2,\dots.I_n$ sur chacun desquels f est monotone. On obtient donc n primitives F_1, $F_2,\dots.F_n$, et on peut donc définir UNE primitive F par : Pour tout $x\in I_k$, $F(x)=F_k(x)$ (on dit que l'on a « recollé » les primitives)

Corollaire :

Les fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$, les fonctions rationnelles sur tout intervalle de leur ensemble de définition, les fonctions sin et cos sur sur $\mathbb{R}$, les fontions exponentielles sur $\mathbb{R}$ et logarithme sur $]0;+\infty[$ ... admettent une infinité de primitives

Remarque :

Il est parfois impossible de donner une expression explicite d'une primitive.

Par exemple, on sait que la fonction $f:x\mapsto e^{-x^2}$ admet une primitive F sur $\mathbb{R}$, mais on ne sait pas en donner une expression explicite.

TABLEAU DES PRIMITIVES USUELLES

Par lecture inverse du tableau des dérivées, on peut dresser le tableau des primitives des fonctions usuelles.
Rappel : Les primitives d'une fonction sont définies à une constante près

***f* (*x*)**	***F*(*x*)**	**conditions sur *x***
0	k (constante)	aucune
a (constante non nulle)	ax	aucune
$x^n,\ n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0,\ n\neq -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	aucune si n positif $x\neq 0$ si n négatif
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$x\neq 0$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$x>0$
$\cos x$	$\sin x$	aucune
$\sin x$	$-\cos x$	aucune
$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$\tan x$	$x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$x>0$
$\frac{1}{x}$	$\ln(-x)$	$x<0$
e^x	e^x	aucune

Remarque : une primitive de $x\mapsto\frac{1}{x}$ est $x\mapsto\ln\lvert x\rvert$, la seule condition étant $x\neq 0$.

Dans tout ce qui suit u est une **FONCTION dérivable**

f	***F***	**conditions sur *u***
$u'u^n,\ n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0,\ n\neq -1$	$\frac{1}{n+1}u^n$	aucune si n positif $u\neq 0$ si n négatif
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u>0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$	$u>0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(-u)$	$u<0$
$u'e^u$	e^u	aucune

Remarque : Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln\lvert u\rvert$, la seule condition étant $u\neq 0$.