Activité : méthode des rectangles

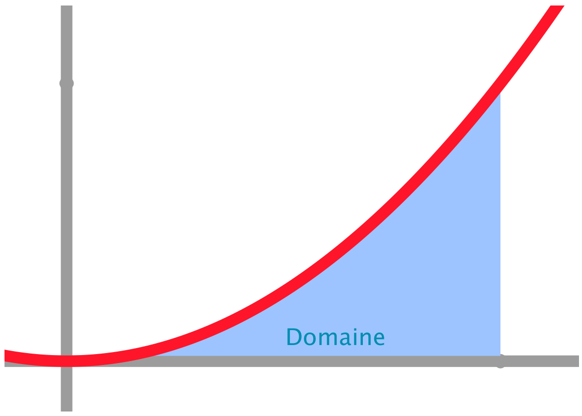
I. Résultats préliminaires

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

II. Etude d'un exemple

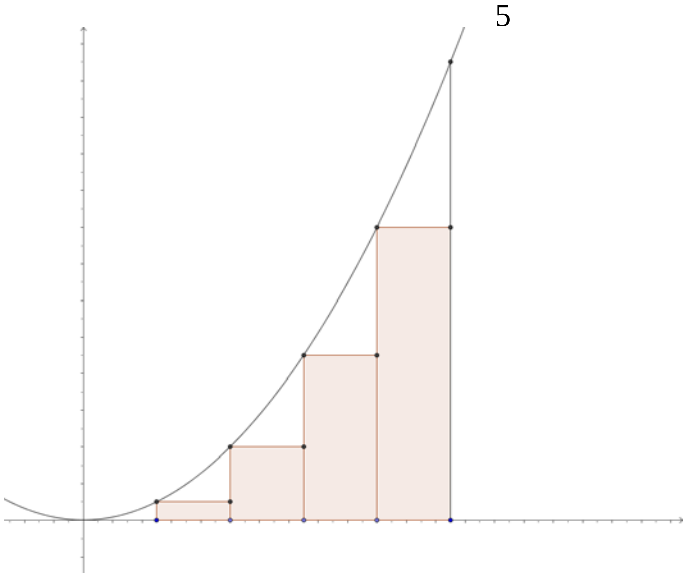
(P) est la partie de la parabole représentant la fonction carré sur [0 ;1].

On veut calculer <u>l'aire sous la courbe (P)</u>
c'est-à-dire l'aire **A** de la surface S comprise entre l'axe des abscisses, la courbe (P) et la droite d'équation « $x = 1$ »
(surface hachurée sur la figure ci-contre)

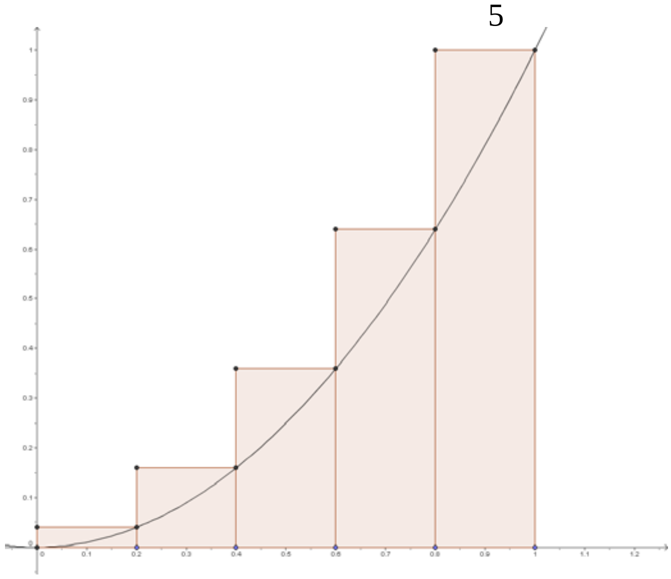


1. On partage l'intervalle [0 ;1] en 5 intervalles de même amplitude $\dfrac{1}{5}$.

On construit 5 rectangles contenus dans la surface S de même largeur égale à $\dfrac{1}{5}$



On construit 5 rectangles qui contiennent la surface S de même largeur égale à $\dfrac{1}{5}$



On pose
u_5 = somme des aires des 5 rectangles "intérieurs"

On pose
v_5 = somme des aires des 5 rectangles "supérieurs"

$$u_5 = \frac{1}{5}\times 0 + \frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

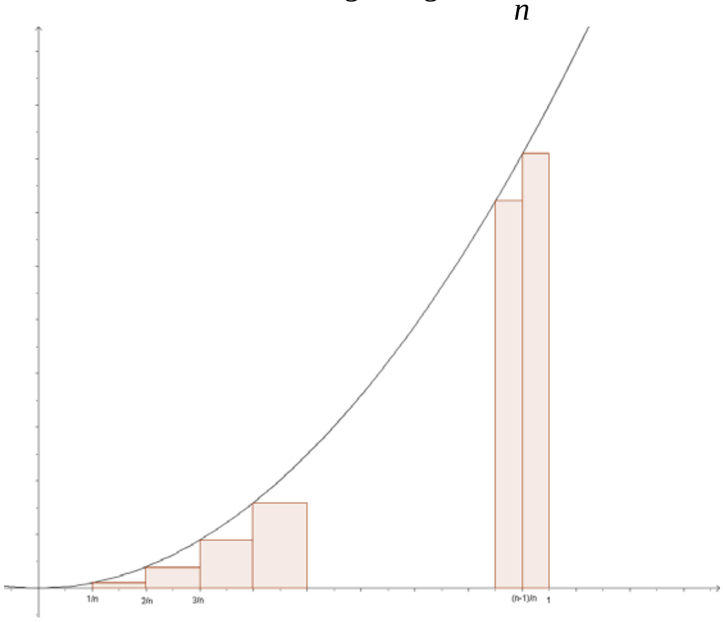
$$v_5 = \frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}\times 1^2$$

a. Justifier que : $\frac{6}{25} < \mathbf{A} < \frac{11}{25}$

b. En déduire que $\frac{17}{50}$ est une valeur approchée de $\mathbf{A}$ à $\frac{1}{10}$ près.

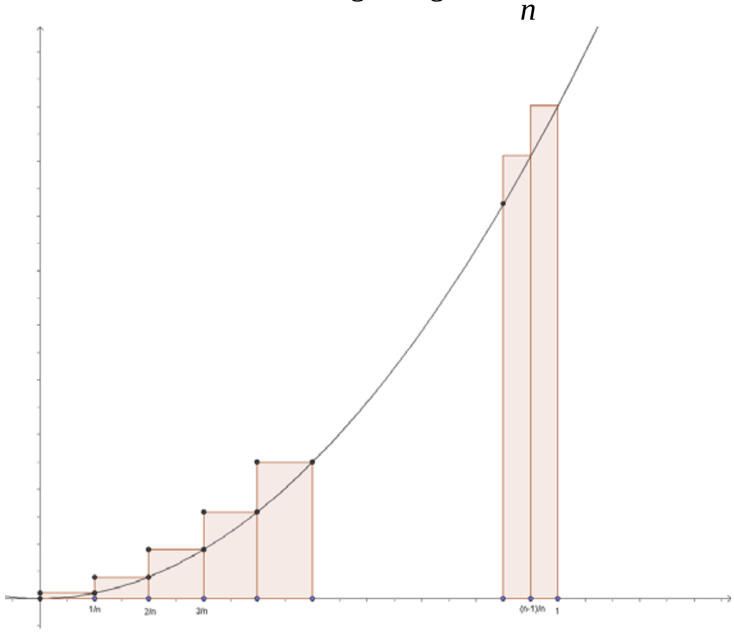
2. On partage l'intervalle [0 ;1] en n intervalles de même amplitude $\frac{1}{n}$ (n entier $n \geq 1$)

On construit n rectangles contenus dans la surface S de même largeur égale à $\frac{1}{n}$



On pose
$u_n =$ somme des aires des n rectangles "intérieurs"

On construit n rectangles qui contiennent la surface S de même largeur égale à $\frac{1}{n}$



On pose
$v_n =$ somme des aires des n rectangles "supérieurs"

a) Justifier que : $u_n = \frac{1}{n^3}\left[0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2\right]$ et $v_n = \frac{1}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + ... + n^2\right]$

b) Déduire des résultats de la partie **I.** que : $u_n = f(n)$ et $v_n = g(n)$

c) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes et déterminer leur limite commune ;

En déduire la valeur exacte que l'on peut attribuer à l'aire $\mathbf{A}$.

Exercice 1 :QCM

Les résultats suivants sont-ils justes (justifier brièvement les réponses…) ?

a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t dt = \frac{1}{2}$. b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t dt = \frac{1}{2}$.

c) $\int_1^{e} \ln t dt = 1$. d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt = 1$. e) $\int_0^{1} te^t dt = 1$.

Exercice 2

1. Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout u différent de $\frac{1}{2}$, $\frac{u^2-1}{2u-1} = au + b + \frac{c}{2u-1}$.

2. Calculer $\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1} dx$.

3. Calculer $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0} \frac{\cos^3 x}{1-2\sin x} dx$.

Exercice 3

1. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}$.

a. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$: $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$.

b. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$. Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

3. En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer : $I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} \ln x dx$. On donnera le résultat sous la forme $p\ln 2 + q\ln 3$ avec p et q rationnels.

Exercice 4

Soit la fonction définie sur l'intervalle I =]4 ; +∞ [par : $f(x) = -2x + 5 + 3\ln\frac{x+1}{x-4}$

et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 1 cm.

1. Étude de f

a. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de I.

b. Montrer que sur I, $f'(x)$ est strictement négative et dresser le tableau de variation de f.

c. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -2x + 5$ est une asymptote à (C). Préciser la position de (C) par rapport à (D).

2. Calcul d'aire

a. Montrer que la fonction G : $x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x$ est une primitive de $g : x \mapsto \ln(x+1)$ sur I.

b. Montrer que la fonction H : $x \mapsto (x-4)\ln(x-4) - x$ est une primitive de $h : x \mapsto \ln(x-4)$ sur I.

c. Déduire des questions précédentes le calcul de l'aire A, en unité d'aire, du domaine plan délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 5$ et $x = 6$.
On donnera la valeur exacte de A puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

Activité (corrigé)

I. **Résultats préliminaires**

- Initialisation : Pour n = 1, on a $1^2 = 1$ et $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{1\times(1+1)(2+1)}{6} = 1$
- On suppose que $1^2+2^2+3^2+........+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:
- On veut montrer que $\displaystyle\sum_1^{n+1} k^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

On a

$$\sum_1^{n+1} k^2 = 1^2+2^2+3^2+........+n^2+(n+1)^2 = S(n)+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = \frac{(n+1)}{6}\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]$$

$$\Rightarrow \sum_1^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)}{6}\left[n(2n+1)+6(n+1)\right] = \frac{(n+1)}{6}\left[2n^2+n+6n+6\right] = \frac{(n+1)(2n^2+7n+7)}{6}$$

Or $\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \dfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$ alors $\displaystyle\sum_1^{n+1} k^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

la propriété est vraie pour tout entier naturel $n > 0$ $\displaystyle\sum_1^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

II. 1. **On partage l'intervalle [0 ;1] en 5 intervalles de même amplitude $\dfrac{1}{5}$.**

a. On a $u_5 < \mathbf{A} < v_5$,

or $u_5 = \dfrac{1}{5}\times 0+\dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{6}{25}$

et $v_5 = \dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^2+\dfrac{1}{5}\times 1^2 = \dfrac{11}{25}$

d'où $\dfrac{6}{25} < \mathbf{A} < \dfrac{11}{25}$

b. On a $\dfrac{6}{25} = \dfrac{12}{50} < \mathbf{A} < \dfrac{11}{25} = \dfrac{22}{50}$.

On a $\dfrac{\dfrac{22}{50}+\dfrac{12}{50}}{2} = \dfrac{\dfrac{34}{50}}{2} = \dfrac{17}{50}$ et $\dfrac{22}{50}-\dfrac{17}{50} = \dfrac{5}{50} = \dfrac{1}{10}$ et $\dfrac{17}{50}-\dfrac{12}{50} = \dfrac{5}{50} = \dfrac{1}{10}$

Donc $\dfrac{17}{50}$ est une valeur approchée de $\mathbf{A}$ à $\dfrac{1}{10}$ près.

2. On partage l'intervalle [0 ;1] en n intervalles de même amplitude $\frac{1}{n}$ (n entier $n \geq 1$)

a) L'aire de chaque rectangle intérieur est :

$$l \times L = \frac{1}{n} \times \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{k^2}{n^3} \Rightarrow u_n = \frac{1}{n^3}\left[0^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right] = \frac{1}{n^3}\sum_0^{n-1} k^2$$

L'aire de chaque rectangle extérieur est :

$$l \times L = \frac{1}{n} \times \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{k^2}{n^3} \Rightarrow v_n = \frac{1}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right] = \frac{1}{n^3}\sum_1^{n} k^2$$

b) De la question I. On en déduit les expressions des termes :

$$u_n = \frac{1}{n^3}\sum_0^{n-1} k^2 = \frac{1}{n^3} \times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n^3}\sum_1^{n} k^2 = \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n)(2n+1)}{6(n+1)^2} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \frac{n^3(2n+1)}{6n^2(n+1)^2} - \frac{(n+1)^2(n-1)(2n-1)}{6n^2(n+1)^2} = \frac{2n^4 + n^3 - (n^2 + 2n + 1)(2n^2 - 3n + 1)}{6n^2(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{2n^4 + n^3 - 2n^4 + 3n^3 - n^2 - 4n^3 + 6n^2 - 2n - 2n^2 + 3n - 1}{6n^2(n+1)^2} = \frac{3n^2 + n - 1}{6n^2(n+1)^2}$$

Du signe du numérateur : $3n^2 + n - 1$: $\Delta = 1 - 4 \times 3 < 0 \Rightarrow$ le trinôme $3n^2 + n - 1$ est positif pour tout x de $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est croissante

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n+2)(2n+3)}{6(n+1)^2} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{n^2(n+2)(2n+3) - (n+1)^3(2n+1)}{6n^2(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} - v_n = \frac{n^2(2n^2 + 7n + 6) - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1)(2n+1)}{6n^2(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} - v_n = \frac{2n^4 + 7n^3 + 6n^2 - 2n^4 - 6n^3 - 3n^2 - 2n - n^3 - 6n^2 - 3n - 1}{6n^2(n+1)^2}$$

$$\Rightarrow v_{n+1} - v_n = \frac{-3n^2 - 5n - 1}{6n^2(n+1)^2}$$

Du signe du numérateur : $-3n^2 - 5n - 1$: comme $n \geq 1$, on a $-3n^2 - 5n - 1 < 0$.

$\Rightarrow v_{n+1} - v_n < 0$ donc la suite (v_n) est décroissante

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}-\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\right]=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{2n^2+3n+1-2n^2+3n-1}{6n^2}\right]=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}\right]=0$$

Par conséquent les deux suites sont adjacentes.

On a $\lim_{n\to+\infty} v_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right]=\frac{1}{3}$.

L'aire de la surface S est la limite commune aux deux suites (u_n) et (v_n).

Correction 1

a) **Vrai** : $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t\,dt=\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$.

b) **Vrai** : $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2t\,dt=\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$

c) **Vrai** : $\int_1^{e}\ln t\,dt=\left[t\ln t-t\right]_1^{e}=1$.

d) **Vrai** : $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt=\left[\frac{1}{\cos t}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=2-1=1$.

e) **Vrai** : Intégration par parties, $\int_0^{1}te^t\,dt=\left[(t-1)e^t\right]_0^1=1$.

Correction 2

1. $\frac{u^2-1}{2u-1}=au+b+\frac{c}{2u-1}=\frac{2au^2-au+2bu-b+c}{2u-1}\Rightarrow\begin{cases}2a=1\\2b-a=0\\c-b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1/2\\b=1/4\\c=-3/4\end{cases}\Rightarrow f(u)=\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}-\frac{3/4}{2u-1}$.

2. $\int_{-1}^{0}\frac{x^2-1}{2x-1}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\frac{2}{2x-1}dx=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}\ln|2x-1|\right]_{-1}^{0}=0-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\ln|-2-1|\right)$

soit $\frac{3}{8}\ln 3$.

3. La fonction à intégrer ressemble un peu à la précédente en prenant $u=\sin x$:

$f(u)=\frac{u^2-1}{2u-1}\Rightarrow f(\sin x)=\frac{\sin^2 x-1}{2\sin x-1}=\frac{\cos^2 x}{1-2\sin x}$; pour pouvoir intégrer $f(\sin x)$, il faut que ce soit sous la forme $(\sin x)'F'(\sin x)=(\cos x)F'(\sin x)$ où F est une primitive de f. Or on a à intégrer $\frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}=\cos x\left[\frac{\cos^2 x}{1-2\sin x}\right]=\cos x\left[\frac{1-\sin^2 x}{1-2\sin x}\right]$ donc tout va bien.

On a finalement $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}dx=\left[\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin x-\frac{3}{8}\ln|2\sin x-1|\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{0}=\frac{3}{8}\ln 2$.

Correction 3

1. $g(x)=\frac{1}{x(x^2-1)}$.

a. $g(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}=\frac{a(x+1)(x-1)+bx(x-1)+cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{(a+b+c)x^2+(c-b)x-a}{x(x+1)(x-1)}$ d'où on tire par identification : $\begin{cases}a+b+c=0\\c-b=0\\-a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b+c=1\\c-b=0\\a=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1/2\\c=1/2\\a=-1\end{cases}$. On a donc $g(x)=\frac{-1}{x}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}$.

b. $G(x)=-\ln x+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)$

(ne pas oublier les valeurs absolues au départ, on les supprime par la suite car on est sur $]1\,;+\infty[$).

2. Une primitive de f est F définie par F(x) = $\frac{1}{-2+1}(x^2-1)^{-2+1}=\frac{-1}{x^2-1}$.

3. Il faut intégrer par parties :

On pose $u(x)=\ln x$, $u'(x)=\frac{1}{x}$

$v'(x)=\frac{2x}{(x^2-1)^2}$, $v(x)=\frac{-1}{x^2-1}$,

ce qui donne

$$I=\int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2}\ln x dx=\left[\frac{-\ln x}{x^2-1}\right]_2^3+\int_2^3\frac{1}{x(x^2-1)}dx$$

$$=-\frac{1}{8}\ln 3+\frac{1}{3}\ln 2+\left(-\ln 3+\frac{1}{2}\ln 4+\frac{1}{2}\ln 2\right)-\left(-\ln 2+\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{2}\ln 1\right)$$

$$=-\frac{1}{8}\ln 3+\frac{1}{3}\ln 2-\ln 3+\ln 2+\frac{1}{2}\ln 2+\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3=-\frac{13}{8}\ln 3+\frac{17}{6}\ln 2.$$

Correction 4

1. a. Lorsque x tend vers 4, $\frac{x+1}{x-4}$ tend vers $+\infty$ ainsi que $\ln\frac{x+1}{x-4}$ donc f tend vers $+\infty$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{x+1}{x-4}$ tend vers 1, $\ln\frac{x+1}{x-4}$ tend vers 0, $-2x+5$ tend vers $-\infty$ donc f tend vers $-\infty$.

b. $f'(x)=-2+3\left[\ln\frac{x+1}{x-4}\right]'=-2+3\left[\ln(x+1)-\ln(x-4)\right]'=-2+3\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-4}\right]=\frac{-2(x+1)(x-4)-15}{(x+1)(x-4)}$.

Lorsque $x > 4$, $x+1$ est positif, $x-4$ est positif donc le numérateur est négatif et le dénominateur est positif. Moralité, f' est négative.

c. $f(x)-(-2x+5)=\ln\frac{x+1}{x-4}$; nous avons dit que ce terme tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ donc la droite (D) est une asymptote à (C). Lorsque $x > 4$, $\frac{x+1}{x-4}>0$ donc (C) est au-dessus de (D).

2. a. On dérive G : $G'(x)=1.\ln(x+1)+(x+1)\frac{1}{x+1}-1=\ln(x+1)$.

b. On dérive H : $H'(x)=1.\ln(x-4)+(x-4)\frac{1}{x-4}-1=\ln(x-4)$.

c. On cherche $A=\int_5^6 f(x)-(-2x+5)dx=3\int_5^6\ln(x+1)-\ln(4-x)dx=3[G(6)-G(5)]-3[H(6)-H(5)]$;

$G(6)-G(5)=7\ln 7-6-6\ln 6+5=7\ln 7-6\ln 6-1$, $H(6)-H(5)=2\ln 2-6-1\ln 1+5=2\ln 2-1$

et le résultat $A=3\left[7\ln 7-6\ln 6-2\ln 2\right]\approx 4,45$.