E1 — Calculs simples d'intégrales à l'aide de primitives.

A $\displaystyle\int_1^4 \left(t+1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{\sqrt{t}}\right) dt = \frac{1}{4}$.

B $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{2}{5}$.

C $\displaystyle\int_1^3 \frac{2u}{\sqrt{u^2+2}}\, du = 2(\sqrt{11}-\sqrt{3})$.

D $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x\, dx = -\frac{1}{3}$.

E $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) dx = 0$.

E2 — Les classiques à ne pas manquer !

A $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx = -\frac{1}{2}$.

B $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\, dx = 2$.

C $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = 1-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

D **Pour tout** x **de** $\mathbb{R}-\{1\}$, $\displaystyle\frac{x^2}{(x-1)^2} = 1+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$ **donc**

$\displaystyle\int_{-3}^{0} \frac{x^2}{(x-1)^2}\, dx = -\frac{7}{4}+\ln 2$.

E **Une primitive sur** $]0;+\infty[$ **de** $f : x \to \ln x$ **est** F: $x \to x\ln x - x$.

E3 — Calculs simples utilisant les propriétés de l'intégrale.

A $\displaystyle\int_0^1 (\ln(1+x)+3)\, dx + \int_0^1 \ln\frac{1}{1+x}\, dx = 3$.

B $\displaystyle\int_1^3 e^{1+x^2} dx + \int_3^1 e^{1+x^2} dx = 0$.

C $\displaystyle\int_0^2 |x-1|\, dx = 21$.

D $\displaystyle\int_{-4}^{-1} x^3 e^x \geq 0$.

E $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x\, dx \geq \int_0^1 x e^x dx$.

E4 Soit la fonction f définie dans $\mathbb{R}-\{-1;+1\}$ par $f(x)=\dfrac{x}{(x^2-1)^2}$

et l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ où a et b sont des réels.

A f est dérivable sur les intervalles $]-\infty;-1[$, $]-1;+1[$ et $]+1;+\infty[$.

B Pour tout x de $\mathbb{R}-\{-1;+1\}$, $f(x)=-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}\right]$,

donc $f=-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{-v'}{v^2}\right]$ où $v : x \to x^2-1$.

C f admet des primitives sur $[0;2]$.

D $\mathrm{I}=\int_2^3 f(x)\,dx$ existe et une primitive de f sur $[2;3]$ est F

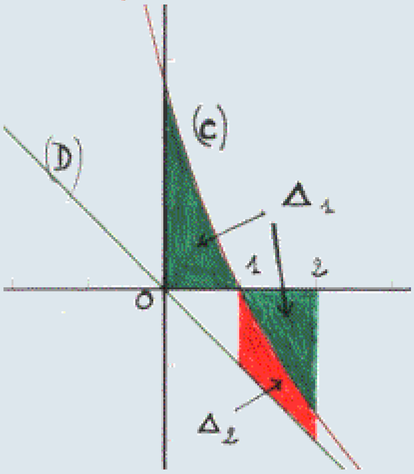
telle que $\mathrm{F}(x)=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x^2-1}$.

E $\mathrm{I}=\dfrac{5}{48}$.

E5 Dans le plan rapporté à un repère orthonormal la courbe (C) représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x+e^{-x+1}$.

On note $\mathrm{A}(\Delta_1)$ l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=2$.

On note $\mathrm{A}(\Delta_2)$ l'aire de l'ensemble des points $\mathrm{M}(x,y)$ du plan tels que $1\le x\le 2$ et $-x\le y\le f(x)$.



A $\mathrm{A}(\Delta_1)=\int_0^2 f(x)\,dx$ unités d'aire (u.a).

B Si, pour tout réel α, on note $\mathrm{I}(\alpha)=\int_1^\alpha f(x)\,dx$, alors on a :

$$\mathrm{I}(\alpha)=-\frac{\alpha^2}{2}-e^{-\alpha+1}+e.$$

C $\mathrm{A}(\Delta_1)=-\mathrm{I}(0)-\mathrm{I}(2)$ u.a.

D $\mathrm{A}(\Delta_2)=\int_1^2 -e^{-x+1}\,dx$ u.a.

E $\mathrm{A}(\Delta_1)=e-1+\dfrac{1}{e}$ u.a et $\mathrm{A}(\Delta_2)=1-\dfrac{1}{e}$ u.a.

E6	Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$ et l'intégrale $I(a)=\int_1^a f(x)\,dx$, où a est un réel strictement positif.

A	Pour $x>0$, $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}$.
B	Une primitive de $g: x\mapsto \dfrac{1}{x(x+1)}$ sur $]0;+\infty[$ est donc la fonction G telle que $G(x)=\ln\dfrac{x}{x+1}$.
C	A l'aide d'une intégration par parties et des résultats précédents on trouve : $I(a) = 2\ln 2 - \dfrac{\ln(1+a)}{a} + \ln\dfrac{a}{a+1}$.
D	$\lim\limits_{a\to 0} I(a)=2\ln 2-1$
E	$\ln(1+a)=\ln[a(1+\frac{1}{a})]=\ln a+\ln(1+\frac{1}{a})$. On en déduit $\lim\limits_{a\to+\infty} I(a)=+\infty$.

E7	Soit les intégrales $I=\int_0^\pi e^x\cos^2 x\,dx$, $J=\int_0^\pi e^x\sin^2 x\,dx$ et $K=\int_0^\pi e^x\cos 2x\,dx$.

A	A l'aide de deux intégrations par parties successives on obtient : $K=\dfrac{e^\pi-1}{4}-\dfrac{K}{4}$ puis $K=\dfrac{e^\pi-1}{5}$.
B	$I+J=e^\pi$.
C	En utilisant la relation $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ on trouve que $I=\dfrac{1}{2}\int_0^\pi e^x dx + \dfrac{1}{2}K$ soit $I=\dfrac{3}{5}(e^\pi-1)$.
D	$J=\dfrac{2e^\pi+3}{5}$.
E	$\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$ donc $I-J=K$. On retrouve ainsi la valeur de K obtenue au A.

E8	Soit la fonction F définie sur $I=]0;+\infty[$ par $F(x)=\int_1^x \dfrac{e^t}{t}\,dt$.

A F est la primitive de f sur I telle que $\mathrm{F}(1) = 2$.

B F est décroissante sur I.

C Pour tout x de I, $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ donc $\mathrm{F}(x) - \ln x = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t}\,dt$

D Pour $x > 0$, le signe de $\mathrm{F}(x) - \ln x$ est résumé ci-dessous :

x	0		1		$+\infty$
$\mathrm{F}(x) - \ln x$	‖	+	0	+	

E Le tableau des variations de F est le suivant :

x	0		$+\infty$
$\mathrm{F}'(x)$	‖	+	
$\mathrm{F}(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

E9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$.

Pour tout réel strictement positif α on pose :

$\mathrm{I}(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)\,dx$, $\mathrm{J}(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ et $\mathrm{K}(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

A $\mathrm{I}(\alpha)$ est un réel positif.

B $\mathrm{J}(\alpha) = \alpha + \ln\frac{1+e^\alpha}{2}$.

C $\mathrm{K}(\alpha) = \int_0^\alpha \left(1 - \frac{e^\alpha}{1+e^\alpha}\right)dx$.

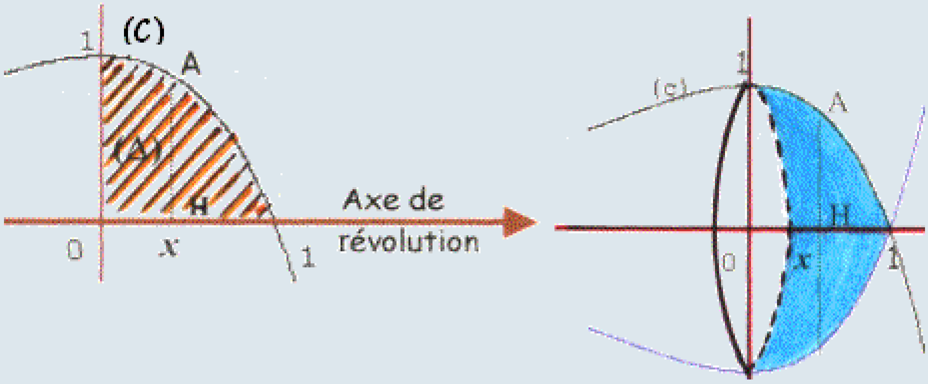
D Pour tout réel x, $f(x) + f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

E De la relation précédente on déduit par intégration :
$\mathrm{I}(\alpha) = \mathrm{K}(\alpha) - f(\alpha) + \ln 2$.

E10

Soit (C) la portion de courbe représentant sur $[0;1]$ la fonction f définie par $f(x)=(1-x)e^x$, et soit (Δ) le domaine plan limité par (C) et les axes de coordonnées.

On veut déterminer le volume V du solide engendré par la rotation de (Δ) autour de (Ox).



A	L'intersection du solide et du plan d'abscisse x, perpendiculaire à l'axe de révolution, est un disque de rayon $AH=(1-x)e^x$.
B	En unités de volume, $\frac{V}{\pi}=\int_0^1 (1-x)^2 e^{2x}dx$.
C	Si on pose $J=\int_0^1 (1-x)e^{2x}dx$ alors $\frac{V}{\pi}=-\frac{1}{4}+J$.
D	$J=\frac{e^3+3}{4}$.
E	$V=\frac{\pi(e^2-5)}{4}$ unités de volume.