| Mathématiques<br>http://afimath.jimdo.com/ | **PRIMITIVES** | $4^{ème}$*math+sci* |
| --- | --- | --- |

## Exercise 1

Déterminez une primitive de $f$ sur $I$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = 10x^5 - 2x + 3; \mathrm{I} = \mathbb{R}$

2) $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2}; I = \mathbb{R}^*$

3) $f(x) = \dfrac{3x}{(x^2+1)^3}; I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}; I = ]1\ ;+\infty[$

5) $f(x) = \dfrac{x^4 - 4x^2 - 2}{x^2}\ ;\ I = ]0\ ;+\infty[$

6) $f(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^3-1}}\ ;\ I = ]1\ ;+\infty[$

7) $f(x) = -1 + \dfrac{3}{x^2}\ ;\ I = ]0\ ;+\infty[$

8) $f(x) = \dfrac{5}{7\sqrt{3x-1}} - 4$, $I = \left]\dfrac{1}{3}\ ;+\infty\right[$

9) $f(x) = \dfrac{3}{(2x-4)^3} + \dfrac{1}{4(5-x)^7}$, $I = ]\ 2\ ;5[$

10) $f(x) = \dfrac{x^2+x}{(2x^3+3x^2)^4}$, $I = ]0\ ;\ +\infty\ [$

11) $f(x) = \dfrac{5x^4 + 2x^3 - 4x + 1}{x^3}$, $I = ]0\ ;\ +\infty\ [$

12) $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2 x} + \sin x\ ; I = \left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$

13) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \cos x\ ;\ I = \left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$

## Exercise 2

1. Montrer que pour tout réel $x$ $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \longmapsto \cos^2 x$

2. En utilisant la question 1. montrer que pour tout $\cos^4 x = \dfrac{\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3}{8}$. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g : x \mapsto \cos^4 x$

3. Montrer que pour tout $x$, $\cos^3 x = \cos x - \cos x \sin^2 x$. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $h : x \mapsto \cos^3 x$

## Exercise 3

Soit $F$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$ et dont la dérivée est donnée par $F'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, pour tout $x$ de $\mathbb{R}$. On suppose que cette fonction existe et on ne cherchera pas à donner une expression de $F(x)$. (C) est la courbe représentative de $F$ dans un repère orthonormal $\left(O\ ;\vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Soit $G$, définie sur $\mathbb{R}$, par $G(x) = F(x) + F(-x)$.

a. Montrer que $G$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$.

b. Calculer $G(0)$ et en déduire que $F$ est une fonction impaire.

2. Soit $H$ définie sur $]0\ ;+\infty[$ par $H(x) = F(x) + F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a. Montrer que $H$ est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et calculer $H'(x)$.

b. Montrer que, pour tout $x$ élément de $]0\ ;+\infty[$, $H(x) = 2F(1)$.

c. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 2F(1)$.

d. Qu'en déduit-on pour la courbe (C) ?

3. a. Démontrer que, pour tout $x$ élément de $[0\ ;\ 1]$, $\frac{1}{2} \leq F'(x) \leq 1$. En déduire que $\frac{1}{2} \leq F(1) - F(0) \leq 1$ puis une valeur approchée de $F(1)$. Quelle est la précision de cette approximation ?

b. Soit $T$ la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ par $T(x) = F(\tan x) - x$. Démontrer que $T$ est une fonction constante sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$. En déduire la valeur exacte de $F(1)$.

4. Dresser le tableau de variation de $F$ sur $\mathbb{R}$. Tracer la courbe (C), ses asymptotes et ses tangentes aux points d'abscisses –1, 0 et 1. Unités graphiques : 2 cm sur $(Ox)$ et 4 cm sur $(Oy)$. On prendra $F(1) = 0{,}78$.