Exercices sur les isométries du plan- 09-10

EXERCICE N°1 :

Soit ABCD et CEFD deux carrés tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$,de centre respectifs I te J et soient les points O , L , K les milieux respectifs des segments [CD],[EF] et [CE].

1- Soit f une isométrie qui transforme le carré ABCD en CEFD
   a- Montrer que f(I) = J
   b- Déduire qu'il existe une seule symétrie orthogonales et une seule translation que l'on précisera qui transforme le carré ABCD en CEFD
2- Déterminer trois rotations qui transforment le carré ABCD en CEFD
3- Soit f l'isométrie définie par f(A)=C ; f(B)=D ; f(C)=F et f(D)=E
   a- Déterminer f(O)
   b- Montrer que f ne peut pas avoir des points invariants
   c- Construire l'image F' de F par f
   d- Calculer fof(A) ; fof(B)et fof (C) .Caractériser fof
   e- Trouver un vecteur $\vec{u}$ et une droite Δ tels que f= $s_\Delta o t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} o s_\Delta$

EXERCICE N°2 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC de sens direct .A' , B' et C' sont les milieux respectifs de [BC] [AC] et [AB] .On pose D = $S_{(AC)}\left(B\right)$ et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

1- Trouver toute les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABC
2- Trouver un déplacement qui transforme ABC en ACD
3- En déduire tous les déplacements qui transforment ABC en ACD et préciser les éléments caractéristiques de chacun d'eux
4- Trouver tout les antidéplacements qui transforment ABC en ACD et déterminer les éléments caractéristiques de chacun d'eux

EXERCICE N°3 :

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B .Soit f une isométries du plan.

1- a- Montrer que si f([AB])=[AB] alors fof = Id_P

   b- En déduire toutes les isométries qui laissent globalement invariant [AB]

2- Soient (C) et (C') deux cercles de centres respectifs O et O' .O≠O',et de rayon R et R'

Déterminer toute les isométries qui laissent invariant (C) ∪(C').On distinguera deux cas :

R = R' et R ≠R'

EXERCICE N°4 :

Soit f la transformation du plan définie analytiquement par :au point M(x,y) on associe le point

M'(x',y') tels que $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{3}y + 2\right) \\ y' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x - y\right) \end{cases}$

1- On pose z=x+iy et z' = x' +iy'.Montrer que $z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\bar{z} + 1$
2- On pose O' =f(O) .Vérifier que :O'M' =OM
3- Déterminer l'ensemble d des points invariant par f
4- Soit M'' d'affixe z'' et M''= fof(M) .Exprimer z'' en fonction de z et montrer que fof est une translation de vecteur $\vec{u}$ que l'on précisera.
5- Soit g = $t_{-\frac{1}{2}\vec{u}} o f$ .A et B les points d'affixes respectives $z_A = \frac{1}{2}$ et $z_B = -\frac{1}{2\sqrt{3}}i$ .Déterminer les affixes des points A' et B' images respectives de A et B par g .Prouver que g est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe Δ
6- Déterminer alors la nature et les éléments caractéristiques de f

EXERCICE N°5 :

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD tel que AB=2AD et $\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On note I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [DC] et K le symétrique de I par rapport è (DC).

1- O pose f= $S_{(IC)} \circ t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(IJ)}$
   a- Caractériser l'isométrie $S_{(BC)} \circ S_{(IJ)}$
   b- En déduire que f est une rotation que l'on caractérisera
2- On pose g = $t_{\overrightarrow{IK}} \circ S_{(IC)}$
   a- Caractériser l'isométrie :g$\circ S_{(AJ)}$
   b- En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur .
3- Soit φ une isométrie qui fixe un point de la droite (AB) et transforme (AB) en (IJ) .
   a- Montrer que φ fixe le point I
   b- Déterminer alors toutes les isométries φ .

EXERCICE N°6 :

Le plan est orienté dans le sens direct .On considère un losange ABCD tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et on désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CD] .

1- Montrer qu'il existe une seule isométrie f qui transforme A en B et D en C .
2- Montrer que si f admet un point invariant M alors M $\in (DI) \cap (BJ)$ .Conclure.
3- Montrer que f est une symétrie glissante d'axe (IJ).
4- Déterminer fof(A) et en déduire le vecteur de la symétrie glissante f

EXERCICE N°7 :

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soient les isométries suivantes : $f = S_{(CB)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(AB)}$ et $g = S_{(CB)} \circ S_{(AD)}$

1- a- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g

b-En déduire la nature et les éléments caractéristique de f

2- Soit R la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$
   a- Construire le point E = R(A)
   b- Quelle est la nature du triangle CAE ?.
   c- Montrer que les points B , D et C sont alignés .
3- Soit I le milieu de [EA]
   a- Vérifier que R = $S_{(CI)} \circ S_{(OA)}$
   b- Déduire alors la nature et les éléments caractéristiques de h = $S_{(CI)} \circ R \circ S_{(CI)}$

EXERCICE N° 8:

Dans le plan orienté on considère un carré ABCD de centre I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ et par r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1- Montrer que : $t = S_{(\Delta)} \circ S_{(AB)}$ où (Δ) est une droite que l'on déterminera
2- Montrer que r = $S_{(IB)} \circ S_{(\Delta)}$
3- En déduire la nature de f rot et ses éléments caractéristiques