CORRECTION DE LA SERIE ISOMETRIE

EXERCICE N°2

1/ABC étant un triangle équilatéral, A', B' et C' désignent respectivement les milieux de [BC], [AC] et [AB] et O est le centre de gravité de ABC.

Soit φ une isométrie qui laisse globalement invariant le triangle ABC.

Donc $\varphi(\{A,B,C\})=\{A,B,C\}$ et $\varphi(O)=O$.

On distingue six cas :

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(A)=A\\ \varphi(B)=B\\ \varphi(C)=C\end{array}\right\}\Leftrightarrow \varphi=Id_P. \quad \left.\begin{array}{l}\varphi(A)=A\\ \varphi(B)=C\\ \varphi(C)=B\\ \varphi(O)=O\end{array}\right\}\Leftrightarrow \varphi=S_{(OA)}. \quad \left.\begin{array}{l}\varphi(A)=B\\ \varphi(B)=A\\ \varphi(C)=C\\ \varphi(O)=O\end{array}\right\}\Leftrightarrow \varphi=S_{(OC)}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(A)=C\\ \varphi(B)=B\\ \varphi(C)=A\\ \varphi(O)=O\end{array}\right\}\Leftrightarrow \varphi=S_{(OB)}. \quad \left.\begin{array}{l}\varphi(A)=B\\ \varphi(B)=C\\ \varphi(C)=A\\ \varphi(O)=O\end{array}\right\}\Leftrightarrow \varphi=R_{\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)} \text{ et } \left.\begin{array}{l}\varphi(A)=C\\ \varphi(B)=A\\ \varphi(C)=B\\ \varphi(O)=O\end{array}\right\}\Leftrightarrow \varphi=R_{\left(O;-\frac{2\pi}{3}\right)}$$

2/Soit R la rotation de centre A et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l}R(A)=A\\ R(B)=C\\ R(C)=D\end{array}\right\}\Rightarrow R \text{ est un déplacement qui transforme ABC en ACD.}$$

3/Soit f un déplacement qui transforme ABC en ACD.

Or R^{-1} est un déplacement qui transforme ACD en ABC; donc $R^{-1}of$ est un déplacement qui laisse globalement invariant ABC.

Donc on a $R^{-1}of=Id_P$ ou $R^{-1}of=R_{\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)}$ ou $R^{-1}of=R_{\left(O;\frac{-2\pi}{3}\right)}$.

D'où $f=R$ ou $f=RoR_{\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)}$ ou $f=RoR_{\left(O;\frac{-2\pi}{3}\right)}$.

Si $f=RoR_{\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)}$ et comme $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\equiv\pi\ [2\pi]$;alors f est une symétrie centrale.

f(A)= $RoR_{\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)}(A)=R(B)=C$.

Donc f est la symétrie centrale $S_{B'}$ de centre B',milieu de [AC].

$S_{B'}(A)=C$; $S_{B'}(B)=D$ et $S_{B'}(C)=A$; donc $S_{B'}$ transforme ABC en ACD.

Si $f=RoR_{\left(O;\frac{-2\pi}{3}\right)}$ et comme $\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\equiv\frac{-\pi}{3}\ [2\pi]$; alors f est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$

$R_{\left(C;\frac{-\pi}{3}\right)}$(A)=D et $R_{\left(C;\frac{-\pi}{3}\right)}$(B)=A; donc $R_{\left(C;\frac{-\pi}{3}\right)}$ transforme ABC en ACD.

Ainsi les seuls déplacements qui transforment ABC en ACD sont R; $S_{B'}$ et $R_{\left(C;\frac{-\pi}{3}\right)}$.

4/Soit g un anti-déplacement qui transforme ABC en ACD.

Alors $R^{-1} og$ est un anti-déplacement qui laisse globalement invariant ABC.

Donc on a $R^{-1} og = S_{(OA)}$ ou $R^{-1} og = S_{(OB)}$ ou $R^{-1} og = S_{(OC)}$.

D'où $g = R o S_{(OA)}$ ou $g = R o S_{(OB)}$ ou $g = R o S_{(OC)}$.

Si $g = R o S_{(OA)}$, alors g(A)=R(A)=A, g(B)=R(C)=D et g(C)=R(B)=C.Donc $g = S_{(AC)}$

Si $g = R o S_{(OB)}$, alors g(A)=R(C)=D, g(B)=R(B)=C et g(C)=R(A)=A.

Donc g est un anti-déplacement tel que gog est non identique, car gog(C)=g(A)=D.

Donc g est une symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$.

$gog(C) = t_{2\vec{u}}(C) = D \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'}$.

g(B)=C et g(C)=A alors les points A' et B' ; milieux respectifs de [BC] et [AC] sont des points de Δ, donc Δ=(A'B').

Ainsi $g = t_{\overrightarrow{A'B'}} o S_{(A'B')} = S_{(A'B')} o t_{\overrightarrow{A'B'}}$.

Si $g = R o S_{(OC)}$, alors g(A)=R(B)=C, g(B)=R(A)=A et g(C)=R(C)=D.

Donc g est un anti-déplacement tel que gog est non identique, car gog(B)=g(A)=C.

Donc g est une symétrie glissante d'axe Δ' et de vecteur $\vec{v}$.

$gog(B) = t_{2\vec{v}}(B) = C \Leftrightarrow \vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C'B'}$.

g(A)=C et g(B)=A alors les points B' et C' ; milieux respectifs de [AC] et [AB] sont des points de Δ', donc Δ'=(B'C').

Ainsi $g = t_{\overrightarrow{C'B'}} o S_{(C'B')} = S_{(C'B')} o t_{\overrightarrow{C'B'}}$

En conclusion ; les seuls anti-déplacements qui transforment ABC en ACD sont :

$S_{(AC)}$; $t_{\overrightarrow{A'B'}} o S_{(A'B')}$ et $t_{\overrightarrow{C'B'}} o S_{(C'B')}$.

EXERCICE N°3:

1/a)f est une isométrie du plan; alors $f([AB]) = [f(A)f(B)]$.

$$f([AB]) = [AB] \Rightarrow \begin{cases} f(A) = A \\ f(B) = B \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} f(A) = B \\ f(B) = A \end{cases} \Rightarrow f of(A) = A \text{ et } f of(B) = B .$$

fof est un déplacement qui fixe deux points distincts; donc $f of = Id_P$.

b) $f of = Id_P \Rightarrow f = Id_P$ ou $f = S_I$ ou $f = S_{(AB)}$ ou $f = S_\Delta$; où I est le milieu de [AB] et Δest la médiatrice de [AB].

Réciproquement , Id_P ; S_I ; $S_{(AB)}$ et S_Δ transforment [AB] en [AB].

Donc les isométries qui laisse globalement invariant [AB] sont Id_P ; S_I ; $S_{(AB)}$ et S_Δ .

2/a)R=R'.

f est une isométrie qui laisse globalement invariant $(C)\cup(C') \Leftrightarrow f([OO']) = [OO']$.

Donc $f = Id_P$ ou $f = S_K$ ou $f = S_{(OO')}$ ou $f = S_{(D)}$; où K est le milieu de [OO'] et (D) est la médiatrice de [OO'].

b)$R \neq R'$

$f((C)\cup(C')) = (C)\cup(C') \Leftrightarrow f(O) = O$ et $f(O') = O' \Leftrightarrow f = Id_P$ ou $f = S_{(OO')}$