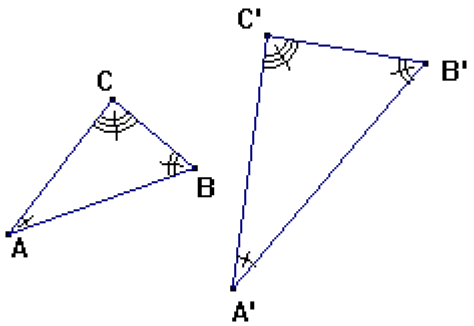
I. Triangles semblables

Définition :

Deux triangles ABC et A'B'C' sont dits semblables si et seulement si l'une des propositions équivalentes suivantes est réalisées :

i. $\hat{A} = \hat{A}'$; $\hat{B} = \hat{B}'$ et $\hat{C} = \hat{C}'$

ii. $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$



Théorème

Deux triangles ABC et A'B'C' sont semblables si et seulement si l'une des propositions équivalentes suivantes est réalisées :

i. $\hat{A}' = \hat{A}$ et $\hat{B} = \hat{B}'$

ii. $\hat{A}' = \hat{A}$ et $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$

Remarques :

i. Si les triangles ABC et A'B'C' sont semblables alors le rapport $k = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$ est dit rapport de similitude du triangle ABC au triangle A'B'C'.

ii. Si les triangles ABC et A'B'C' sont semblables et de même orientation alors on dit qu'ils sont directement semblables.

iii. Si les triangles ABC et A'B'C' sont semblables et d'orientations contraires alors on dit qu'ils sont indirectement semblables.

Application N°1

ABC est un triangle inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$. La bissectrice du secteur [AB,AC]coupe [BC] en I et $\mathcal{C}$ en D
Montrer que les triangles ADB et ACI sont semblables.

Application N°2

ABC est un triangle rectangle en A ; I est le pied de la hauteur issue de A .

1) Montrer que les triangles IBA et ABC sont semblables.
2) Montrer que les triangles IAC et ABC sont semblables.
3) En déduire que : ABx IA = ACx IB.
   Que peut on conclure pour les triangles IBA et IAC ?

II. Définition des similitudes et propriétés

1°/ Activité :

Dans le plan orienté, on considère l'application S de P dans lui même qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que : z' = (1 + i)z + 2 + i .

1) Soient M et N deux points du plan d'images respectives M' et N' par S.
   Exprimer M'N' en fonction de MN.
2) Montrer que S admet un unique point invariant I.
3) Pour tout point M≠I, établir l'équivalence :

$$S(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} IM' = \sqrt{2}IM \\ (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$$

4) On désigne par h l'homothétie de centre I et de rapport 2 et par R la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
   Montrer que : S = h o R = R o h.

2°/ Définition

Soit f une application du plan P dans lui même ; on dit que f est une similitude si et seulement si il existe un réel k **<u>strictement positif</u>** tel que : pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f on a : **M'N' = k MN**.
Le réel k s'appelle le rapport de la similitude f.

<u>Exemples :</u>

- Toute isométrie est une similitude de rapport …..
- Toute homothétie de rapport λ est une similitude de rapport k = …..

Théorème

La composée de deux similitudes est une similitude de rapport le produit des rapports.

Prouver ce résultat.

3°/ Décomposition d'une similitude

Activité

1) Soient h une homothétie de rapport λ (λ≠0) et φ une isométrie. On pose f = hoφ ; montrer que f est une similitude dont on précisera le rapport.
2) Soit f une similitude de rapport k (k > 0) et A un point du plan. On pose $h = h_{(A,k)}$ et $\varphi = h^{-1}of$.
   Montrer que φ est une isométrie et en déduire que f

est la composée d'une homothétie et d'une isométrie. Cette décomposition est elle unique ?

Théorème

Une application f du plan P dans lui même est une similitude de rapport k ($k \in \mathbb{R}_+^*$) si et seulement si elle s'écrit sous la forme : $f = h \circ \varphi$, où h est une homothétie de rapport k et φ est une isométrie.

Conséquences

Du théorème précèdent en déduit que :

- Toutes les propriétés communes aux homothéties et aux isométries restent valables pour les similitudes (conservation de l'alignement, du parallélisme, de l'orthogonalité, du barycentre, du contact, de l'équipollence …)
- Si $EF = xAB + yCD$ alors $E'F' = xA'B' + yC'D'$
- L'image d'un segment [AB] par une similitude f de rapport k est un segment [A'B'] tel que : A'B' = kAB.
- L'image d'une droite par une similitude est une droite.
- L'image d'un cercle *C* de centre O et de rayon R par une similitude f de rapport k est un cercle *C*' de centre O' = f(O) et de rayon kR.

4°/ Théorème

Toute similitude de rapport k est une bijection dont la réciproque est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$

Preuve : le résultat précédent découle de la décomposition d'une similitude.

5°/ Activité

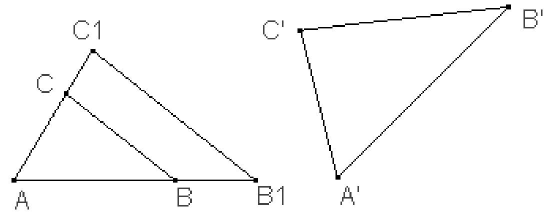
a) Montrer que toute homothétie h de rapport λ ($\lambda \neq 0$) conserve les mesures des angles orientés.

b) On considère quatre points A, B, C et D d'images respectives A', B', C' et D' par une similitude f de rapport k.

- Exprimer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ en fonction de AB, CD et $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$
- En déduire : $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'} = k^2 \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$
- Enoncer ainsi le théorème démontré.

6°/ Activité

On considère deux triangles semblables ABC et A'B'C' et on désigne par k le rapport de similitude du triangle ABC au triangle A'B'C'. On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport k et par B_1 et C_1 les images respectives des points B et C par h.



- Vérifier que les triangles AB_1C_1 et A'B'C' sont isométriques et en en déduire qu'il existe une unique isométrie φ transformant AB_1C_1 en A'B'C'
- On pose $f = \varphi o h$. Vérifier que f est une similitude qui transforme ABC en A'B'C'.
- On suppose qu'il existe une similitude g transformant ABC en A'B'C' et on pose $\Psi = g^{-1} o f$.
  Caractériser Ψ et en déduire l'unicité de f.

Théorème

Si ABC et A'B'C' sont deux triangles **semblables** alors il existe une **unique** similitude f vérifiant :
f(A) = A', f(B) = B' et f(C) = C'

Remarque : le rapport de f est celui de similitude du triangle ABC au triangle A'B'C'.

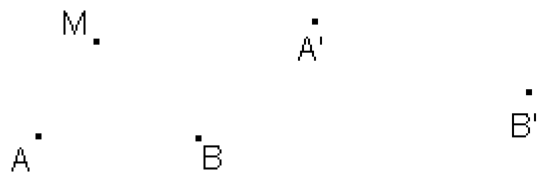
Conséquence :

Si deux similitudes coïncident en trois points non alignés alors elles sont égales.
On dit qu'une similitude est bien déterminée par la donnée de trois points non alignés et de leurs images.

III. Classification des similitudes

1°/ Activité N°1

Soient A et B deux points distincts d'images respectives A' et B' par une similitude f et M un point du plan tel que : A, B et M ne sont pas alignés.



- Construire, si c'est possible, l'image M' du point M par f. Le problème admet il une solution unique ?
- Pour chaque point M' obtenu, comparer l'orientation du triangle A'B'M' avec celle de ABM.

Activité N°2

On considère deux homothétie h et h' de rapport respectifs λ et λ'et on se propose de caractériser l'application φ =h'oh.
Soient M et N deux points du plan. On pose :

$$\begin{matrix} M_1 = h(M) \\ N_1 = h(N) \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} M' = h'(M_1) \\ N' = h'(N_1) \end{matrix}$$

a) Préciser $\varphi(M)$ et $\varphi(N)$
b) Exprimer $\overrightarrow{M'N'}$ en fonction de $\overrightarrow{MN}$
c) **On suppose que $\lambda\lambda' = 1$**.
Soit A un point du plan d'image A' par φ
- Montrer que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$
- Caractériser alors φ.

d) **On suppose que $\lambda\lambda' \neq 1$.**
- Montrer que φ admet un unique point invariant I.
- Montrer que $\overrightarrow{IM'} = \lambda\lambda' \overrightarrow{IM}$.
- Caractériser alors φ

Retenons

> La composée de deux homothéties de rapports λ et λ' est :
> - Une translation si $\lambda\lambda' = 1$.
> - Une homothétie si $\lambda\lambda' \neq 1$.

Activité N°3

Soit f une similitude de rapport k. On décompose f sous les formes : f = h o φ et f = h'oφ' où h et h' sont deux homothéties de rapports k ; φ et φ' deux isométries.
En exprimant φ' en fonction de h, h' et φ déduire les résultats suivants :
- φ est un déplacement $\Leftrightarrow$ φ' est un déplacement.
- φ est un antidéplacement $\Leftrightarrow$ φ' est un antidéplacement.

Définitions

> Soit f une similitude et f = hoφ une décomposition de f en la composée d'une homothétie et d'une isométrie.
> - f est dite similitude directe (ou positive) si et seulement si φ est un déplacement.
> - f est dite similitude indirecte (ou négative) si et seulement si φ est un antidéplacement.

Conséquences

a) Puisque les homothéties conserves les mesures des angles orientés en déduit que :
- Les similitudes directes conserves les mesures des angles orientés.
- Les similitudes indirectes transforment les mesures des angles orientés en leurs opposées.

b) La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.
La composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe.
La composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.
c) La réciproque d'une similitude directe est une similitude directe.
La réciproque d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.

IV. Les similitudes directes

1°/ Angle d'une similitude directe

Soit f une similitude directe de rapport k et f = hoφ une décomposition de f où h est une homothétie de rapport k et φ est un déplacement d'angle θ.
Soient A et B deux points distincts du plan d'images respectives A' et B' par f.
A_1 et B_1 étant les images respectives de A et B par φ ; vérifier que $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{A_1B_1}$ et en déduire que :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta[2\pi]\cdot$$

En considérant une autre décomposition de f, prouver que le réel θ ne dépend que de f, ce réel est appelé angle de la similitude directe f.

Retenons

> Pour toute similitude directe f il existe un réel θ (déterminé à $2k\pi$ prés) tel pour tous points A et B distincts d'images respectives A' et B' par f on a :
>
> $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \theta[2\pi]$
>
> Le réel θ est appelé angle de f.

2°/ Centre d'une similitude directe

Soit f une similitude directe de rapport k et d'angle θ.
Remarquons que si k =1 alors f est un déplacement et par suite c'est une translation ou une rotation (cas déjà étudiés dans le chapitre précédent)
On suppose dans la suite que $k \neq 1$
f est une similitude de rapport $k \neq 1$ donc f est différente de l'identité et par suite il existe au moins un point A du plan tel que f(A) = A' $\neq$ A.
On se propose de déterminer l'ensemble des points invariants par f.
S'il existe un point M du plan invariant par f alors M$\neq$A et on peut écrire :

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} MA' = kMA & (1) \\ (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'}) \equiv \theta[2\pi] & (2) \end{cases}$$

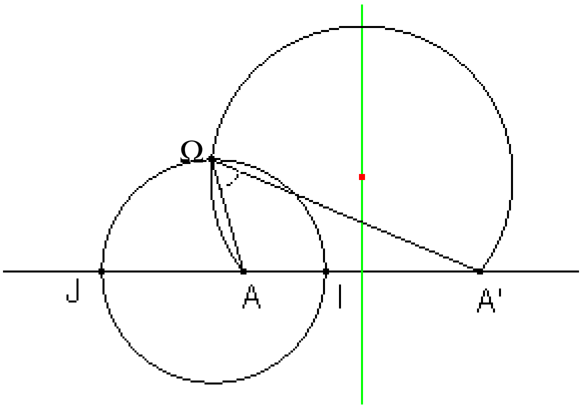
Désignons par $\Gamma = \{ M \in P$ tel que : $\dfrac{MA'}{MA} = k \}$ et par

$\Gamma' = \{ M \in P$ tel que : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'}) \equiv \theta[2\pi] \}$

On rappelle que :

- Puisque $k \neq 1$, alors Γ est le cercle de diamètre [IJ] où I est le barycentre du système { (A',1), (A,k)} et J est le barycentre du système {(A',1), (A,-k)}
- Γ' est : soit un arc de cercle d'extrémités A et A' (si $\theta \neq k\pi$), soit le segment [AA'] privé des points A et A', soit (AA') – [AA'].

Il résulte que dans tous les cas les ensembles Γ et Γ' se coupent en un unique point Ω et par suite f admet un unique point invariant Ω appelé centre de f.



Retenons

Toute similitude directe, différente d'une translation, admet un unique point invariant Ω appelé **centre** de la similitude.

3°/ Récapitulation

Une similitude directe f, différente d'une translation, est caractérisée par : son rapport k, son angle θ et son centre Ω

On note : **f = S(Ω,k,θ)**.

Ω, k et θ sont appelés éléments caractéristiques de la similitude directe.

Conséquence

- Si f = S(Ω,k,θ) alors pour tout M≠Ω on a :

$$\mathbf{f(M) = M'} \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

- $S^{-1}(\Omega,k,\theta)=$ …………
- S(Ω,k,θ) o S(Ω,k',θ')= …………

Application

On pose f = S(I, 2, $\frac{\pi}{3}$). Construire l'image M' d'un point M du plan.

Cas particuliers :

Compléter en justifiant :

- S(Ω,k,π)= …………
- S(Ω,k,0)= …………
- S(Ω,1,θ)= …………

4°/ Forme réduite d'une similitude directe

Activité

Soit f une similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ. On pose h = h(Ω,k) et R = R(Ω,θ)
Montrer que f = h oR = Roh.

Théorème :

Toute similitude directe f de centre Ω, de rapport k et d'angle θ se décompose, d'une manière unique, sous la forme : **f = Roh = hoR** ; où h = h(Ω,k) et R = R(Ω,θ) Cette décomposition est appelé forme réduite de f.

5°/ Activité

On considère deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$.

On pose $k = \dfrac{A'B'}{AB}$ et on désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport k et par B_1 l'image de B par h.

a) Montrer qu'il existe un déplacement unique φ transformant A en A' et B_1 en B'.

b) On pose f = hoφ. Vérifier que f est une similitude directe qui transforme A en A' et B en B'.

c) On suppose qu'il existe une similitude directe g transformant A en A' et B en B' et on pose $\Psi = g^{-1}of$; caractériser Ψ et en déduire que f = g.

Théorème

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont deux vecteurs non nuls, alors il existe une similitude directe unique f tel que : f(A)=A' et f(B) =B'

Remarque :

On dit qu'une similitude directe est parfaitement déterminée par la donnée de deux points distincts et leurs images.

Corollaire

Si deux similitudes directes coïncident en deux points distincts, alors elles sont égales.

Justifier ce résultat.

6°/ Similitudes directes et nombres complexes

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u_0}, \vec{v_0})$.

Activité N°1

Soient a et b deux nombres complexes tels que :a≠1 et a≠0 et soit f l'application de P dans lui même qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que : z' = az + b.

a) Montrer que f admet un unique point invariant $\Omega(z_0)$.

b) Etablir que pour tout M≠Ω, on a :

$$f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

c) Conclure.

Activité N°2

Soit f une similitude directe de centre $\Omega(z_0)$, de rapport k et d'angle θ.

Soit M(z)≠Ω ; exprimer ,en fonction de z, l'affixe z' du point M'= f(M) .

Théorème

- Si f = S(Ω,k,θ) alors la transformation complexe F associée à f est définie par :

  $F : z \mapsto z' = az + b$

  Où : a = [k, θ] et b = (1 – a)z_0 (z_0 = aff(Ω))

- Soient a et b deux nombres complexes tels que a∉ {0,1}. L'application de P dans lui même qui à tout M(z) associe M'(z') tel que : z' = az + b , est la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ avec : $z_0 = \dfrac{b}{1-a}$, k = $|a|$ et $\theta \equiv \text{Arg}(a)[2\pi]$

Exercice

Déterminer la transformation complexe associée à f dans chacun des cas suivants :

a) f = S(A, 2, $\frac{\pi}{4}$) avec A(1 + i)

b) f est la similitude directe transformant A(1 – i) en C(5 + i) et B(2i) en D(-1 – i). Déduire alors les éléments caractéristiques de f.

7°/ Construction du centre d'une similitude directe

Soit f une similitude directe, différente d'une translation, de centre Ω, d'angle θ et de rapport k.

On se propose de construire Ω sachant deux points distincts A et B et leurs images respectives A' et B' par f.

1) On suppose que : (AB) // (A'B') et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$.
   Quelles sont les valeurs possibles de θ ?
   En déduire que f est une homothétie puis construire Ω.
2) On suppose que : (AB) et (A'B') sont sécantes et que AB = A'B'.
   Vérifier que f est une rotation et en déduire une construction de Ω.
3) On suppose que AB≠A'B' et que (AB) et (A'B') sont sécantes en un point I distinct des points A, B, A' et B'.
   a) Montrer que les points Ω, I, A et A' d'une part et les points Ω, I, B et B' sont cocycliques.
   On désigne par $\mathcal{C}_1$ le cercle circonscrit au triangle IAA' et par $\mathcal{C}_2$ le cercle circonscrit au triangle IBB'.
   b) Montrer que si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents alors Ω = I.
   c) On suppose que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont sécants.
   Montrer que si Ω = I alors il existe une homothétie de centre I transformant A en B et A' en B' et par suite les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ seront tangents.
   En déduire alors que **Ω est le point d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ autre que I.**
4) On suppose que I = A.
   a) Montrer que Ω, A, B et B' sont cocycliques.
   b) Montrer que : $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'})[2\pi]$
   c) En déduire que Ω appartient au cercle passant par A et A' et tangent à (AB) en A.
   d) En déduire une construction de Ω.

<u>Exercice N°1</u>

Soit dans le plan orienté un triangle ABD rectangle en A de sens direct.1/ Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABD.

On désigne par: I le projeté orthogonal de A sur (DB), A' et B' les symétriques respectifs de A et B par rapport à I.

a) Soit M le projeté orthogonal de B' sur [AD]. Montrer que A',B' et M sont alignés.

b) Soit S la similitude directe de centre M qui transforme A en B'; Préciser son angle .
   Déterminer les images par S des droites (AI) et (MB'). En déduire l'image de A' par S.

c) Montrer que le point I', image de I par S, est le milieu de [B'D]. En déduire que la droite (MI) est tangente en M au cercle de diamètre [DB'].

2/ On suppose que AD=2AB. On appelle C le milieu de [AD]. Soit f la similitude directe qui transforme D en C et C en B.

a) Déterminer le rapport et l'angle de f.

b) Soit Ω le centre de f déterminer la nature et les éléments caractéristiques de fof. En déduire une construction du point Ω.

c) Soit E le point image de B par fof. Montrer que les points Ω, D et E sont alignés.

d) Déterminer et construire l'image de Γ par f.

Problème :

I. On considère dans le plan orienté un triangle ABC. On suppose que B et C sont fixes et A est variable.

1°) Déterminer et construire les ensembles suivants

$E_1 = \{A \in P \,/\, (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]\}$

$E_2 = \{A \in P \,/\, (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]\}$

$E_3 = \{A \in P \,/\, (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{6}[\pi]\}$

2°) Construire A lorsque :

$AB = 2AC$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

II. On suppose que ABC est isocèle rectangle en A tel que : $A \in E_1$, on note O = B*C, par Δ la droite passant par C et perpendiculaire à (BC) et B' le point d'intersection des droites (AB) et Δ.

Soit I un point de [BC] distinct de O, on note J le point d'intersection de (AI) et de la droite passant par C et perpendiculaire à (AC). La perpendiculaire en A à (AI) coupe (BC) en K.

1°) Faire un dessin.

2°) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a/ Déterminer R(B), R<(AB)>, R<(BC)> et R<(AK)>.

b/ Construire K' = R(K) et I' = R(I).

c/ Quelle est la nature du triangle AKK' puis AII' ?

3°) On pose ϖ = I*I' et ϖ' = K*K'. On désigne par S la similitude directe de centre A,de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

a/ Déterminer S(K) et S(I).

b/ Déterminer l'ensemble des points ϖ lorsque I décrit [BC]-{O}.

c/ Etablir que ϖ, O et ϖ' sont alignés.

4°) Dans le plan complexe rapporté au R.O. $(A, \vec{i}, \vec{j})$.

a/ Déterminer la forme complexe de S' = RoS.

b/ Décomposer S'= hor = roh

V. Les similitudes indirectes

1°/ Centre d'une similitude indirecte

Activité

Soit g une similitude indirecte de rapport $k \neq 1$.

On pose f = gog

a) Montrer que f admet un unique point invariant Ω.

b) On pose Ω' = g(Ω). Etablir l'égalité : ΩΩ' = kΩΩ' et en déduire que Ω' = Ω.

c) On suppose qu'il existe un point I invariant par g ; montrer que I =Ω.

Théorème

Toute similitude indirecte, de rapport différent de 1, admet un unique point invariant Ω appelé centre de la similitude.

2°/ Forme réduite d'une similitude indirecte

Activité

Soit g une similitude indirecte de centre Ω et de rapport $k \neq 1$. On désigne par h l'homothétie de centre Ω et de rapport k et on pose $\varphi = h^{-1}og$.

a) Préciser φ(Ω) et en déduire que φ est une symétrie axiale, on note Δ l'axe de φ.

b) En déduire que $g = hoS_\Delta$

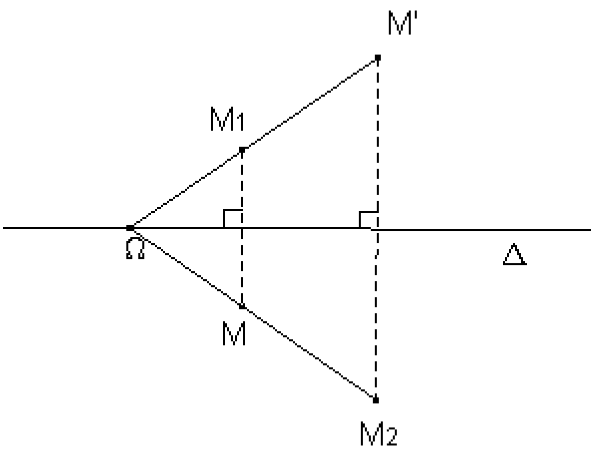
c) On pose $\Psi = (S_\Delta oh)^{-1}o(hoS_\Delta)$.
Montrer que pour tout $M \in \Delta$, Ψ(M) = M.

d) Caractériser alors Ψ et en déduire que : $\mathbf{hoS_\Delta = S_\Delta oh}$

e) Prouver l'unicité de la décomposition précédente .

Théorème

Toute similitude indirecte g de centre Ω et de rapport $k \neq 1$, se décompose d'une manière unique sous la forme : $g = hoS_\Delta = S_\Delta oh$; où h est l'homothétie de centre Ω et de rapport k et S_Δ est la symétrie orthogonale d'axe Δ passant par Ω.
Cette décomposition est appelé forme réduite de g.



Vocabulaire : une similitude indirecte g de rapport différent de 1 est caractérisée par son centre, son rapport et son axe ; ceux si sont appelés les **éléments caractéristiques** de g.

Retenons :

L'axe $\Delta = \{ M\in P$ tel que : $g(M) = h(M) \}$
$= \{ M\in P$ tel que : $Ag(M) = kAM \}$

Justifier ce résultat.

3°/ Théorème

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont deux vecteurs non nuls, alors il existe une similitude indirecte **unique** g tel que : g(A)=A' et g(B) =B'

En considérant $g = foS_{AB}$ démontrer ce théorème ; où f est l'unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Activités

1°/ On considère un carré ABCD de sens direct et de centre I.
Donner les éléments caractéristiques de la similitude directe f dans chacun des cas suivants :
a) f est de centre C et transforme A en B.
b) f est de centre A et transforme B en C.
c) f transforme B en I et C en D.

2°/ On considère un triangle ABC équilatéral de sens direct. On désigne par I le milieu de [BC]
Donner les éléments caractéristiques de la similitude directe f dans chacun des cas suivants :
a) f de centre C est transforme I en A.
b) f de centre I et transforme C en A.

Problème

Soit *C* un cercle de centre I et A un point de *C*. Soient B le point image de A par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et O le milieu du segment [AB] ; la demi droite [OI) coupe le cercle *C* en D.

1°/ Soit S la similitude directe de centre A qui transforme I en O. Déterminer le rapport k et l'angle α de S.

2°/ Soit K le pied de la hauteur issue de A à [DB].
a) Montrer que le triangle ADK est rectangle isocèle en K.
b) En déduire que S(D) = K.
c) Soit J = A*D, montrer que I, J et K sont alignés.

3°/ a) Soit E le point diamétralement opposé à A sur le cercle *C*. Montrer que S(E) = B.
a) Soit F le point tel que ABEF est un carré de sens direct. Montrer que S(F) = I.

b) Montrer que les droites (ID) et (EF) sont perpendiculaires et en déduire que (OK) est la médiatrice de [IB] (on pourra déterminer S<(ID)> et S<(EF)>)

c) Soit L, le symétrique de I par rapport à O. Montrer que l'image du carré ABEF est le carré ALBI.

4°/ Soit σ la similitude indirecte qui transforme J en K et K en A.
a) Déterminer le rapport k' de σ.
b) Soit Ω le centre de la similitude indirecte σ ; caractériser $\sigma o \sigma$. Déterminer $\sigma o \sigma(J)$ et en déduire que $\Omega = D$.
c) Déterminer l'axe de σ et montrer que $\sigma(I) = H$ où H est l'orthocentre du triangle ABD.
d) Montrer que $K = D*\sigma(A)$. Construire $A' = \sigma(A)$.

5°/ Soit $g = \sigma oS$.
a) Déterminer g(D) et g(A) puis donner la nature de g.
b) La droite (OJ) coupe (AA') en J' ; montrer que la forme réduite de g est : $g = t_{\overrightarrow{JJ'}} o S_{(JJ')}$.

Exercice

Soit dans le plan orienté un triangle ABC tel que :

AC=2AB et $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.Γ_1 est le cercle passant par A et B et tangent à (AC) en A; Γ_2 est le cercle passant par A et C et tangent à (AB) en A. Γ_1 et Γ_2 se coupent en A et O. M$\in$[AB] N$\in$[AC] et AN=2BM,I est le milieu du segment [MN].

1/ S est la similitude directe qui transforme B en A et A en C.

a) Déterminer le rapport et un angle de S.

b) Montrer que O est le centre de S. En déduire que $S(\Gamma_1)=\Gamma_2$.

2/a) Montrer que OAB est un triangle rectangle en B.

b) En déduire que OAC est un triangle rectangle en A.

3/a) Montrer que: S(M)=N

b) Déterminer l'ensemble des points I lorsque M décrit [AB].

4/ S' est la similitude indirecte tel que S'(B)=A et S'(A)=C.

a) Déterminer le rapport de S'.

b) O' est le centre de S'. Déterminer S'oS'.

c) En déduire que: $\overrightarrow{O'C} = 4\overrightarrow{O'B}$ .Puis construire O'. Δ est l'axe de S'; construire Δ

d) Δ coupe (AB) en G et (AC) en H. Montrer que G=O'*H. En déduire que S(G)=H.