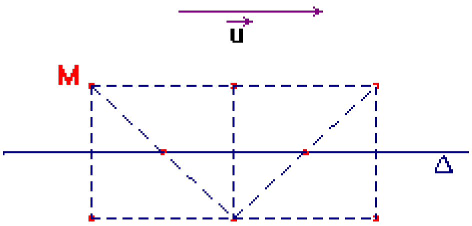
Isométries Planes

I. Symétrie glissante

1/ Activité N°1

Soient dans le plan P une droite Δ et un vecteur non nul $\vec{u}$ directeur de Δ. On se propose dans cette activité d'étudier l'application $f = t_{\vec{u}} o S_\Delta$.
Soit M un point du plan, on pose : $M_1 = S_\Delta(M)$ et $M' = t_{\vec{u}}(M_1)$.



1) a) Préciser f(M).
   a) On pose $M_2 = t_{\vec{u}}(M)$. Quelle est la nature du quadrilatère $MM_1M'M_2$?
   b) En déduire que : $t_{\vec{u}} o S_\Delta = S_\Delta o\, t_{\vec{u}}$.
2) On suppose qu'il existe un point M du plan invariant par f.
   a) Montrer que : $\overrightarrow{M_1M} = \vec{u}$.
   b) En déduire que f n'admet aucun point invariant.
3) a) Montrer que f est bijective.
   b) Caractériser l'application réciproque f^{-1}
4) Montrer que $fof = t_{2\vec{u}}$.
5) Montrer que pour tout point M du plan, d'image M' par f, on a : $M{*}M' \in \Delta$.

2/ Définition :

Soient dans le plan P une droite Δ et un vecteur non nul $\vec{u}$ directeur de Δ. On appelle symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$, la composée commutative $f = t_{\vec{u}} o S_\Delta = S_\Delta o\, t_{\vec{u}}$

Pour déterminer les éléments caractéristiques de f (l'axe et le vecteur) on peut utiliser les propriétés établies dans l'activité N°1 :

- $fof = t_{2\vec{u}}$
- si $M' = f(M)$ alors $M{*}M' \in \Delta$.
- $\Delta = \{ M \in P \,/\, t_{\vec{u}}(M) = f(M) \}$

3/ Activité N°2 :

Soient une droite Δ et $\vec{u}$ non nul. On suppose que $t_{\vec{u}} o S_\Delta = S_\Delta o\, t_{\vec{u}}$ et on se propose de montrer que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ.
Soit M un point de Δ, on pose : $M' = t_{\vec{u}}(M)$
   a) Montrer que $M' \in \Delta$.
   b) Conclure.

4/ Propriété :

A partir des activités N°1 et N°2 en déduit la propriété suivante :
Etant donné une droite Δ et un vecteur non nul $\vec{u}$

$$\boxed{\begin{array}{c} t_{\vec{u}} o S_\Delta = S_\Delta o\, t_{\vec{u}} \\ \Updownarrow \\ \vec{u} \text{ est un vecteur directeur de } \Delta \end{array}}$$

5/ Exercice N°1

On considère un rectangle ABCD et un point M du plan. Les symétries orthogonales d'axes respectifs (AB), (BC) et (CD) transforment respectivement M en M_1, M_1 en M_2 et M_2 en M_3

1. On pose : $f = S_{(CD)} o S_{(BC)} o S_{(AB)}$
   a) Préciser f(M).
   b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.
2. Quel est l'ensemble des milieux du segment $[MM_1]$ lorsque M varie dans le plan ?

II. Isométrie plane

1) Définition :

Une application f du plan dans le plan est une isométrie si et seulement si elle conserve les distances.

i.e : pour tous M et N du plan d'images respectives M' et N' par f on a : M'N' = MN.

Application :

f	Isométrie	N'est pas une iso
Translation		
Homothétie		
Rotation		
Symétrie axiale		
Projection		
Symétrie glissante		
Symétrie centrale		

Propriété : La composée de deux isométries est une isométrie.

Justifier le résultat énoncé dans cette propriété.

2/ Exercice N°2

A. Soit f l'application du plan P dans P qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que : $z' = i\bar{z} + 1 - i$

1) Montrer que f est une isométrie.
2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
3) Montrer que pour tout $M \in P$, d'image M' par f, on a :
   a) $M*M' \in \Delta$.
   b) $(MM') \perp \Delta$.
   c) Caractériser alors f.

B. Soit g l'application de P dans P qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que : $z' = i\bar{z} + 2$

1) Montrer que g est une isométrie.
2) Déterminer 'ensemble des points invariants par g.
3) Montrer que gog est une translation dont on précisera le vecteur v.
4) On pose $f = t_{\vec{u}} o g$ avec $v = -2u$.
   a) Donner la transformation complexe associé à f.
   b) Caractériser f.
   c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.

3/ Activité N°3

Soit f une application du plan dans le plan . On désigne par A, B et C trois points du plan d'images respectifs A', B' et C' par f.

1) On suppose que f est une isométrie.
   a) En remarquant que $BC = AC - AB$, exprimer $AB.AC$ en fonction de AB², AC² et BC².
   b) Exprimer $A'B'.A'C'$ en fonction de A'B'², A'C'² et B'C'².
   c) En déduire l'égalité : $A'B'.A'C' = AB.AC$
   On dit que f conserve le produit scalaire.
2) On suppose que f conserve le produit scalaire.
   En posant B = C , déduire que f est une isométrie.

On vient ainsi de démontrer le théorème suivant :

Théorème :

Soit f une application du plan dans le plan.
f est une isométrie du plan si et seulement si elle conserve le produit scalaire.

4/ Propriété :

Soit f une isométrie du plan . On désigne par A, B et C trois points du plan d'images respectifs A', B' et C' par f et par x un réel.

Si $AC = x\,AB$ **alors** $A'C' = x\,A'B'$

Prouver ce résultat.

Conséquences : A justifier et à retenir :

- Toute isométrie conserve le milieu.
- Toute isométrie conserve le barycentre de deux points pondérés.
- Toute isométrie conserve le l'alignement
- Si une isométrie laisse invariants deux points distincts A et B alors elle laisse invariant tout point M de la droite (AB).
- Toute isométrie conserve l'équipollence. i.e : si $CD = AB$ alors $C'D' = A'B'$

5/ Activité N°4

Soient f une isométrie du plan et R =(A, AB, AC) un repère orthonormé du plan A', B' et C' les images respectives des points A, B et C par f.

1) Montrer que R'= (A', $A'B', A'C'$) est un repère orthonormé du plan.
2) Montrer que si un point M a pour coordonnées (x, y) dans le repère R alors son image M' par f a les mêmes coordonnées (x, y) dans R'.

3) En déduire que f est bijective.
4) Montrer que la réciproque f^{-1} est une isométrie.

Théorème : Toute isométrie du plan est une bijection dont la réciproque est une isométrie.

N.B : A partir de la propriété 4/ on peut prouver le résultat suivant :
A', B', C',D',E' et F' étant les images respectives des points A,B,C,D,E et F par une isométrie f , x et y étant des réels donnés.

Si $\mathbf{EF = xAB + yCD}$
Alors $\mathbf{E'F' = xA'B' + yC'D'}$

III. Caractérisation d'une isométrie

On se propose dans cette Partie de caractériser une isométrie f à partir de son ensemble de points invariants .

1ier cas : f fixe trois points non alignés

On suppose que f fixe trois points non alignés A, B et C.
Soit M un point quelconque du plan en exprimant AM à laide de AB et AC, déduire que M est invariant par f.

Théorème : si une isométrie f fixe trois points **non alignés** alors f = id_P

Corollaire : Si deux isométries f et g coïncident en trois points **non alignés** alors f = g

Prouver ce corollaire (on pourra poser $\varphi = g^{-1} of$ et montrer que $\varphi = id_P$)

NB : On dit ainsi qu'une isométrie est parfaitement déterminée par les images de trois points non alignés.

2ième cas : f fixe deux points distincts f et ≠ id_P

On suppose dans cette partie que f fixe deux points distincts A et B et que f ≠ id_P

Rappelons d'abord que f fixe tout point de la droite (AB) (Voir conséquences II. 4/)
Soit C un point non situé sur (AB) et désignons par C' l'image de C par f.
1/
a) Montrer que C' ≠ C
b) Montrer que (AB) = med[CC']

2/ On pose $\varphi = S_{(AB)} of$
a) Déterminer φ(A) , φ(B) et φ(C). Que peut on conclure pour φ ?
b) En déduire que f = $S_{(AB)}$

Théorème : Si une isométrie f ≠ id_p **fixe deux points distincts** A et B alors f est la symétrie orthogonale d'axe (AB).

NB : dans ce qui précède on vient de démontrer le résultat suivant :
Si A est un point du plan d'image A'≠ A par une isométrie f alors tout point fixe M par f, s'il existe, est situé sur]medAA'[.

3ième cas : f admet un unique point invariant

On suppose que f admet un unique point invariant I.
Soit A un point du plan distinct de I et désignons par A' l'image de A par f (on a évidemment A'≠ A puisque A≠I et I est l'unique point fixe par f) .
On pose $\varphi = S_\Delta of$ où Δ = med[AA']
a) Préciser φ(I) et φ(A).
b) Caractériser φ.
c) En déduire que f est une rotation de centre I.

Théorème : Si une isométrie f admet un **unique point fixe** I alors f est une rotation de centre I.

4ième cas : f n'admet aucun point invariant

On suppose dans cette partie que f n'admet aucun point invariant.
Soit A un point du plan d'image A' par f (on a évidemment A'≠A), on pose $\varphi = t_{\overrightarrow{A'A}} of$.

a) Préciser φ(A).
b) Montrer que φ ne peut pas être une rotation d'angle non nul.

c) En déduire que φ est soit l'identité, soit une symétrie orthogonale
d) En déduire alors que f est soit une translation de vecteur non nul soit une symétrie glissante.

Théorème : si f est une isométrie qui n'admet **aucun point fixe** alors f est soit une translation de vecteur non nul soit une symétrie glissante.

De ce qui précède en déduit le résultat suivant :

Théorème : une application f du plan dans lui même est une isométrie si et seulement si f est une translation ou une rotation ou une symétrie orthogonale ou une symétrie glissante.

Conséquence : toute isométrie est la composée d'au plus trois symétries orthogonales.

Retenons : si ABC et A'B'C' sont deux triangles isométriques alors il existe une unique isométrie f tel que f(A) = A', f(B) = B' et f(C) = C'.

Prouver ce résultat.

Exercice N°4 :

Déterminer toutes les isométries qui laissent invariant un carré ABCD de centre I et de sens direct.

Exercice N°5

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC équilatéral direct de centre G. Soit r la rotation de centre G et d'angle π/3.
On pose A' = r(A), B' = r(B) et C' = r(C).

1) Quel est le centre du triangle A'B'C' ?
2) Soit f une isométrie transformant {A,B,C} en {A',B',C'}
   a) Montrer que f(G) = G
   b) Déterminer toutes les isométries transformant {A, B, C} en {A', B', C'}.
3) Soit A''B''C'' un triangle équilatéral de centre G'' et tel que : $\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{G''A''}$.
   Quelle est l'image du triangle ABC par l'isométrie $t_{\overrightarrow{GG''}} or$?
4) Soit φ une isométrie transformant {A,B,C} en {A'',B'', C''}
   a) Montrer que φ(G) = G''.
   b) Déterminer toutes les isométries φ transformant {A,B,C} en {A'', B'', C''}

Exercice N°6

1) Soit ABC un triangle équilatéral direct .Déterminer toutes les isométries f qui laissent globalement invariant le triangle ABC.
2) Soit $D=S_{(AC)}(B)$ on se propose de déterminer toutes les isométries f qui transforment ABC en ACD.
   a) On pose $g = S_{(AC)} of$ .Déterminer l'image par g du triangle ABC.
   b) En déduire toutes les isométries f.

Exercice N°7

Soit ABCD un losange non carré de centre I. Soit I l'ensemble des isométries qui laissent globalement invariant l'ensemble {A, B, C, D}.
On note f(I) = I'.

1/ a) Montrer que: $\overrightarrow{I'A} + \overrightarrow{I'B} + \overrightarrow{I'C} + \overrightarrow{I'D} = \vec{0}$.
   b) En déduire que le point I est invariant par toute isométrie f ∈ I.
2/ Soit f∈ I, montrer que f(A)∉ {B, D}.

3/ a) $f \in \mathcal{I}$ et f(A) = C ; montrer que ($S_{(BD)}$of)
fixe les points A et I.
b) En déduire les éléments de $\mathcal{I}$ qui fixent le losange ABCD.

4/ Déterminer les éléments de $\mathcal{I}$ qui fixent le point A et en déduire que l'ensemble des isométries qui laissent globalement invariant le losange ABCD est $\mathcal{I}$ = { Id, $S_{(AC)}$, $S_{\{BD),}$ S_I }.

<u>Exercice N°8</u>

Dans le plan oriente on considère un carré ABCD de sens direct et de centre O.
Soit A'B'C'D' le carré transformé de ABCD par la rotation de centre O et d'angle $\pi/4$.
1)Quel est le centre de A'B'C'D' ?
2)Soit f une isométrie transformant {A,B,C,D} en {A',B',C',D'}.
Montrer que f(O)=O.
En déduire les déplacements puis les antidéplacements transformant {A,B,C,D} en {A',B',C',D'}.