Similitudes

AFIF BEN ISMAIL

Exercice 1 :

On considère dans le plan orienté un triangle ABC tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

On désigne par E le milieu de [AC]

1. s est la similitude directe de centre A qui envoie B sur E.
   a. Déterminer l'angle et le rapport de s.
   b. La perpendiculaire à (EB) passant par E coupe la droite (AB) en F , montrer que s(E) = F
2. f est la similitude directe telle que f(A) = C et f(F) = E
   a. Déterminer $(f\circ s)$ (E).
   b. Montrer que $(f\circ s)$ est la symétrie centrale de centre E.
   c. Soit f(E) = D ; montrer que BCD est un parallélogramme.
3. Ω est le centre de f.
   a. Déterminer $(f\circ f)$ (F) caractériser $(f\circ f)$
   b. On déduire que Ω est le projeté orthogonal de E sur la droite (DF).
4. K est le symétrique de D par rapport à Ω et g la similitude indirecte de centre Ω qui transforme E en K.
   a. Déterminer $g\circ f^{-1}$ (D) puis caractériser $g\circ f^{-1}$
   b. Caractériser l'application $g\circ f^{-1}$ et montrer que g(F) = E.

Exercice 2 :

Soient ABCD un rectangle de centre O tel que :

$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

Soit f la similitude directe de centre A qui transforme B en O

Et g la similitude directe de centre D qui transforme O en C.

1.a. Caractériser f et g .
   b. Soit $R = g\circ f$, déterminer la nature de R, déterminer son angle .
   c. Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. En déduire que O est le centre de R .
2. La perpendiculaire à (DB) en B coupe (OC) en M. Soit B' = S_c(D) et M' = g(M).
   a. Montrer que g(B) = B'.
   b. En déduire que (B'M') et (DC) sont perpendiculaires.
3. Soit D' = $S_{(AC)}$(D)
   a. Déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD'}})$.
   b. Prouver que les points C, D' et M' sont alignés
   c. Construire alors le point M'.
4. La parallèle à (OB) passant par M coupe (AB) en M''.
   Montrer que le triangle OM'M'' est un triangle équilatéral de sens indirect

Exercice 3 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soit f l'application qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z+1$.

1. Justifier que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω, le rapport k et l'angle θ.
2. On note A_0 le point O et, pour tout entier naturel n, on pose $A_{n+1} = f(A_n)$.
   a. Déterminer les affixes des points A_1, A_2 et A_3. Placer ces points.
   b. Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \Omega A_n$. Justifier que (u_n) est une suite géométrique .
   c. A partir de quel rang n_0 tous les points A_n sont à l'intérieur du cercle de centre Ω et de rayon 0,1.
3. a. Quelle est la nature du triangle $\Omega A_0 A_1$? En déduire la nature du triangle $\Omega A_n A_{n+1}$.
   b. Pour tout entier naturel n, on note l_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$.
   Exprimer l_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (l_n)?