EXERCICE N°1

On pose pour a *réel strictement positif la fonction* f_a *définie sur* $[0,a]$ *par :*

Pour tout $x \in [0,a]$, $f_a(x) = \dfrac{a-x}{a(a+x)}$.

1°) Montrer que f_a *réalise une bijection de* $[0;a]$ *sur* $[0;\frac{1}{a}]$. *On note* f_a^{-1} *sa bijection réciproque.*

2°) Donner le tableau des variations de f_a^{-1} *en précisant les valeurs aux bornes.*

3°) Montrer que $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$.

EXERCICE N°2

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ *par* $f(x) = \sqrt{4x^2+x} + 2x + 1$

1°)Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0,+\infty[$

2°)Montrer que f est une bijection de $[0,+\infty[$ *sur un intervalle J que l'on précisera.*

3°)Sur quel ensemble f^{-1} *est-elle continue ?*

4°)Expliciter $f^{-1}(x)$ *pour* $x \in J$

5°)Montrer que l'équation $f(x) = x + 2$ *admet une solution unique* $\alpha \in \left]\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right[$

EXERCICE N°3

Soit $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$.

1°)Déterminer le domaine de définition D_f *de f.*

2°)Etudier la dérivabilité de f sur D_f .

3°)Montrer que f est une bijection de $[0,1[$ *sur un intervalle J que l'on précisera*

4°) Expliciter $f^{-1}(x)$ *pour* $x \in J$

EXERCICE N°4

Soit $f : x \mapsto f(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1°) Etudier la dérivabilité de f sur R.

2°) Montrer que f est une bijection de R sur un intervalle J que l'on précisera

3°) Expliciter $f^{-1}(x)$ *pour* $x \in J$

4°)Montrer que f^{-1} *est dérivable sur J et calculer* $(f^{-1})'(1)$.

EXERCICE N°5

On considère la fonction f définie sur $[-1,1]-\{0\}$ *par :* $f(x) = 1 + \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

On note par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé R .

Partir A

1°)Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ *et interpréter les résultats obtenus*

2°)Etudier la dérivabilité de f en point d'abscisse x=1 et interpréter le résultat obtenu.

3°) Etudier la dérivabilité de f en point d'abscisse x=-1 et interpréter le résultat obtenu.

4°)Montrer que : $\forall x \in]-1,1[-\{0\}$: $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$

5°)Dresser le tableau de variation de la fonction f .

6°)Montrer que f réalise une bijection de $]0,1[$ *sur un intervalle J que l'on précisera .*

7°)Expliciter $f^{-1}(x)$ *pour tout x de J .*

8°) Représenter dans le même repère R la courbe C et C' de f^{-1} .

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ *par* $g(x) = f(\cos x)$

1°) Montrer que pour tout x de : $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = 1 + \tan(x)$

2°)Etudier le sens de variation de la fonction g .

5°) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ *sur un intervalle K qu'l'on précisera*

6°)Montrer que g^{-1} *est dérivable sur K et* $\forall x \in K$: $\left(g^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$

EXERCICE N°6

Soit la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ *par :* $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$
1°)Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ *et calculer f'(x) .*
2°)Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et interpréter le résultat obtenu.
3°)Dresser le tableau de variation de f .
4°)Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ *sur un intervalle J que l'on précisera .*
5°)Montrer que pour tout x de J : $f^{-1}(x) = \dfrac{1 + x^2}{2x}$
6°)On désigne par C et C' les courbe respectives de f et f^{-1} *dans même repère orthonormé .*
montrer que la droite D : y = 2x est une asymptote oblique à C.
7°)Tracer C et C' .
8°)Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ *par* $g(x) = f\left(\dfrac{1}{\cos(x)}\right)$

a) *Montrer que pour tout x de* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = \dfrac{1 + \sin(x)}{\cos(x)}$

b) *Montrer que g réalise une bijection de* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ *sur un intervalle K qu'l'on précisera .*

c) *Montrer que* g^{-1} *est dérivable sur K et pour tout x de K :* $\left(g^{-1}\right)'(x) = \dfrac{2}{1 + x^2}$

EXERCICE N°7

Soit $f : R \to R \; ; x \mapsto \begin{cases} x^3 + 12x + 1 & si \quad x \in]-\infty,0] \\ \sqrt{1 + x^2} - x & si \quad x \in]0,+\infty[\end{cases}$

1°)Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
2°)Etudier la continuité de f sur D_f
3°)Etudier la dérivabilité de f en o .
4°)Calculer f'(x) puis dresser la tableau de variation de f .
5°)Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans $]-\infty,0]$ *une solution unique* α .
Vérifier que $\alpha \in \left]\dfrac{-1}{12},0\right[$
6°)Soit g la restriction de f sur $]0,+\infty[$.

a) *Montrer que g réalise une bijection de* $]0,+\infty[$ *sur un intervalle J que l'on precisera .*
b) *Soit* g^{-1} *la fonction réciproque de g .*
    i) *Etudier la continuité et la dérivabilité de* g^{-1} *sur J*
    ii) *Expliciter* $g^{-1}(x)$ *; pour tout x de J .*

EXERCICE N°8

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} & si \quad x > 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{2}\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) & si \quad -\dfrac{\pi}{4} \le x \le 0 \end{cases}$

1°) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur sa domaine de définition.

2°)Soit g la restriction de f à $\left[-\dfrac{\pi}{4},0\right]$.

a- Montrer que g est une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{4},0\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b- Déterminer le domine de dérivabilité de g^{-1}, puis expliciter $\left(g^{-1}\right)'(x)$

3°)a-Monter que l'équation $g(x)+x=0$ admet une solution unique $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{4},0\right[$

b-En déduire que le point $I(-\alpha,\alpha) \in \left(\zeta g^{-1}\right) \cap D$ où $\left(\zeta g^{-1}\right)$ est la courbe représentative de g^{-1} dans un repère orthonormé et D est la droite dont une équation cartésienne est : y = -x .

EXERCICE N°9

Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\tan x$.

1°)Montrer que f réalise une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur R.

2°)Soit h la fonction réciproque de f. Montrer que h est dérivable sur R et calculer $h'(x)$ pour tout $x \in R$

3°)Soit φ la fonction définie sur $[0,1[$ par : $\varphi(x)=h\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

a- Montrer que φ est dérivable sur $[0,1[$ et calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x \in [0,1[$.

b- En déduire que : $\forall x \in [0,1[,\ \varphi(x)=\dfrac{\pi}{4}+h(x)$.

4°)Soit g la fonction définie sur $[0,1[$ par : $g(x)=h\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)-(1+2x)h(x)$.

a- Montrer que g est deux fois dérivable sur $[0,1[$ et calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.

b- Etudier les variations de g' sur $[0,1[$ puis en déduire celles de g .

c- En déduire qu'il existe un unique réel $c \in]0,1[$ tel que $c=\tan\dfrac{\pi}{8c}$

5°)a-Montrer que l'équation : $h(1-x)=2h(x)$ admet au moins une solution $\alpha \in R$

b-Montrer que α vérifier : $\alpha^3-\alpha^2-3\alpha+1=0$

EXERCICE N°10

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$

1°)Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2°)Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f .

3°)Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0, définir ce prolongement.

EXERCICE N°11

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ par : $f(x)=\sqrt[3]{2\cos x-1}$

1°)Etudier le dérivabilité de f sur $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$.

2°)Montrer que f est une bijection de de $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ sur $[0,1]$.

3°)Soit f^{-1} la réciproque de f, calculer $\left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt[3]{\sqrt{3}-1}\right)$

4°)Préciser le domine K de la dérivabilité de f^{-1}.

5°)Déterminer l'expression de $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout x de K.

EXERCICE N°12

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x+\sqrt[3]{x}$.

1°)Soit $x\in\,]0,+\infty[$. Montrer que pour tout $\beta\in[x,x+1]$ on a : $\dfrac{1}{3.\sqrt[3]{(x+1)^2}}+1\le f'(\beta)\le\dfrac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}}+1$

2°)En déduire que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$ on a : $\dfrac{1}{3.\sqrt[3]{(x+1)^2}}\le\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\le\dfrac{1}{3.\sqrt[3]{x^2}}$

3°)En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$

EXERCICE N°13

Soit $f : R \to R \,;\, x \mapsto f(x)=\begin{cases} x^3 & si \quad x\le 0\\ 2x^2 & si \quad 0<x<\dfrac{1}{2}\\ x+\sqrt{2x-1} & si \quad x\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$

1°)Etudier la continuité de f sur R
2°)Montrer que f réalise une bijection de R sur R.

3°)Etablire que : $f^{-1}(x)=\begin{cases} -\sqrt[3]{-x} & si \quad x\le 0\\ \sqrt{\dfrac{x}{2}} & si \quad 0<x<\dfrac{1}{2}\\ x+1-\sqrt{2x} & si \quad x\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$

EXERCICE N°14

Soit f la fonction définie sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\sin(x)}$

1°)Etudier les variations de f .

2°)Montrer que f est une bijection de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle I que l'on déterminera .

3°)On désigne par g la fonction réciproque de f. Calculer : g(1) , g($\sqrt{2}$) et g(2).

4°)Montrer que g est dérivable sur I et que : $\forall x\in I \;:\; g'(x)=\dfrac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$

5°)Soit h la fonction numérique définie sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $h(x)=f(x)+\dfrac{1}{4}$

Montrer que l'équation h(x) = x admet une solution unique x_0 telle que : $\dfrac{\pi}{3}<x_0<\dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE N°15

Partie I : On considère la fonction g définie sur $[0,1[$ par : $g(x)=\sqrt{\dfrac{2x}{1-x^2}}$.

1°)Montrer que g n'est pas dérivable à droite en 0.
2°)Etudier les variations de g et en déduire que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle I que l'on déterminera.
3°)Expliciter $g^{-1}(x)$ pour $x\in I$

4°)Vérifier que pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$: $g\left(\tan\dfrac{x}{2}\right)=\sqrt{\tan x}$.

Partie II : On considère la fonction f définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=2\sqrt{\tan x}-1$

1°)Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

2°)Dresser le tableau de variations de f et en déduire que f est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

3°)Montrer que pour tout x de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$: $f'(x)>1$.

4°)Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ une solution unique α et vérifier que $\alpha\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right[$

5°)En déduire le signe de : f(x) – x

6°) On considère la suite u définie sur N par $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=f^{-1}(u_n) \end{cases}$

a- Montrer que pour tout n de N : $u_n\geq\alpha$

b- Montrer que la suite u est décroissante.

c- En déduire que u est convergente et donner sa limite.

Partie III : On considère la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $\varphi(x)=\sqrt{\tan x}$

1°)Montrer que φ admet une fonction réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J' que l'on déterminera.

2°)Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$ on a : $\left(\varphi^{-1}\right)'(x)=\frac{2x}{1+x^4}$

3°)Calculer $\varphi^{-1}(1)$ et montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$: $\varphi^{-1}(x)+\varphi^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$

EXERCICE N°16

Partie I : Soit la fonction f définie sur $]-1,1[$ par : $f(x)=-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

1°)Etudier les variations de f.

2°)Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $]-1,1[$ un solution unique α et que $\alpha>\frac{4}{5}$

3°)En déduire le signe de f(x) – x .

4°)Montrer que f réalise une bijection de $]-1,1[$ sur R.

5°)Montrer que , pour tout x de R on a : $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}$

Partie II : Soit la suite u définie sur N par $\begin{cases} u_0\in[0,\alpha] \\ u_{n+1}=f^{-1}(u_n) \end{cases}$

1°)a-Montrer que , pour tout n de N, $0\leq u_n\leq\alpha$.

b-Montrer que la suite u est croissante.

c-En déduire que u est convergente et calculer sa limite.

2°)Montrer que pour tout $x\in R_+$ on a : $\left|\left(f^{-1}\right)'(x)\right|\leq\frac{1}{2\sqrt{2}}$

3°)Montrer que pour tout n de N on a : $|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n-\alpha|$.

4°)En déduire que pour tout n de N on a : $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n|u_0-\alpha|$. Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Partie III : Soit la fonction h définie sur $]-1,1[$ par : $h(x)=f\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$.

1°)Montrer que pour tout x de $]-1,1[$: $h(x)=-1-\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$

2°)Montrer que h établit une bijection de $]-1,1[$ sur R.

3°)Montrer que h^{-1} est dérivable sur R et que $\left(h^{-1}\right)'(x)=\frac{-2}{\pi\left(1+(x+1)^2\right)}$

4°)Soit pour tout x de R* la fonction H tel que : $H(x)=h^{-1}(x-1)+h^{-1}\left(\frac{1}{x}-1\right)$.

a- *Montrer que H est dérivable sur R et déterminer* $H'(x)$.

b- *Calculer* $H\left(\frac{1}{2}\right)$ *et* $H\left(-\frac{1}{2}\right)$. *En déduire que :* $\begin{cases} H(x) = -1 & si \quad x > 0 \\ H(x) = 1 & si \quad x < 0 \end{cases}$

5°)*Pour tout n de N on a :* $v_n = \sum_{k=1}^{n} \left(h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k}\right) \right)$ *et* $w_n = \frac{v_n}{n}$.

a- *Donner la valeur de* $H\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. *En déduire que :* $\forall k \in N^* \ : \ h^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + h^{-1}\left(-\frac{1}{k+1}\right) = -1$

b- *Montrer que pour tout n de* $N^* \ : \ v_n = n - h^{-1}\left(-\frac{1}{n+1}\right)$. *En déduire que la suite w est convergente et donner sa limite.*