EXERCICE N°1

Soit g la fonction définie sur R par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{-x}{x+1} & si \quad x \in]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[\\ g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x - 2 & si \quad x \in [-2;1] \end{cases}$

Etudier la dérivabilité de g sur R.

EXERCICE N°2

Soit la fonction f définie sur [–1 ; +∞[par : $f(x) = \left|x^2 + x\right|\sqrt{x+1}$.

1°) Déterminer le signe de $P(x) = x^2 + x$ *suivant les valeurs de x dans [–1 ; +∞[.*

1°) Etudier la dérivabilité de f en x = –1.

2°)Etudier la dérivabilité de f en x = 0.

3°)Conclure sur les tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisse –1 et 0.

EXERCICE N°3

Soit f la fonction définie sur [-4 ,4] par : $\begin{cases} f(x) = -2x - 4 & si\ x \in [-4;-2] \\ f(x) = 2 - x - x^2 & si\ x \in]-2;4]. \end{cases}$

On note (C) la courbe de f dans un repère orthonormal.
Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

a) $\lim\limits_{x \to (-2)^-} \dfrac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \lim\limits_{x \to (-2)^+} \dfrac{f(x) - f(-2)}{x+2}$.

b) *f est dérivable en x = –2.*
c) *(C) admet deux tangentes horizontales.*
d) *La tangente à (C) au point d'abscisse x = –1 a un unique point d'intersection avec (C).*
e) *La tangente à (C) au point d'abscisse x = 1 a un unique point d'intersection avec (C).*

EXERCICE N°4

Soit la fonction f définie par : $f(x) = |x+1|(x^2 + x)$

1°) Déterminer l'expression de f(x) sur chacun des intervalles]-∞ ; -1[et [-1 ; ∞[.

2°) Étudier la dérivabilité de f en -1.

EXERCICE N°5

Montrer que : Pour tout x>0 : $\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \le \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \le \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

EXERCICE N°6

Partie I

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ *par :* $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} & si \quad x \ge 0 \\ x^2 - x & si \quad x < 0 \end{cases}$

1°)Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 . Interpréter graphiquement les résultats obtenus .

2°)Montrer que $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2x}} & si \quad x > 0 \\ 2x - 1 & si \quad x < 0 \end{cases}$

3°)Dresser le tableau des variations de f
4°)Montrer que si $x > 2$ *alors* $f(x) > 2$

5°)Montrer que , pour tout $x \ge 2$, $f'(x) \le \dfrac{1}{2}$

Partie II

Soit $(u_n)_{n \in N}$ *la suite réelle définie par :* u : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \end{cases}$

1°)Montrer que : pour tout n de N : $u_n > 2$.

2°) Etudier les variations de (u).

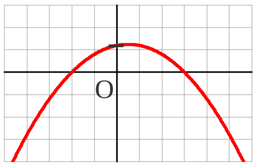
3°)En déduire que (u) est convergente et calculer sa limite.

4°)Montrer que , pour tout n de N : $u_{n+1} - 2 \leq \dfrac{u_n - 2}{2}$

5°)En déduire que , pour tout n de N : $u_n - 2 \leq \dfrac{1}{2^n}$. Retrouver alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

EXERCICE N°7

La parabole ci-contre est la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré f dans un repère orthogonal.
$(\|\vec{i}\| = 1 \ ; \ \|\vec{j}\| = 5)$



Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une courbe ne représente pas une primitive de la fonction f . Laquelle ? (justifier la réponse)

Figure 1

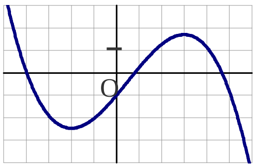


Figure 2

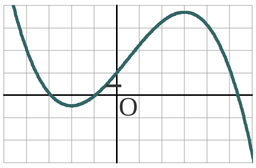
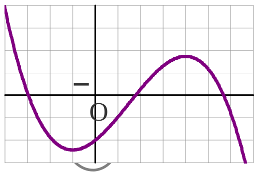


Figure 3



EXERCICE N°8

Déterminer les primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I.

1°) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$; $I = R$

2°) $f : x \mapsto (2x+1)(x^2+x+1)$; $I = R$

3°) $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

4°) $f : x \mapsto (2x+1)\sin(x^2+x+1)$; $I = R$

5°) $f : x \mapsto \sin x + x\cos x$; $I = R$

6°) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $I =]-1,1[$

7°) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x}$; $I =]0,\pi[$

8°) $f : x \mapsto \cos x.\cos 2x$; $I = R$

9°) $f : x \mapsto \dfrac{x\cos x + \sin x}{x^2}$; $I =]0,+\infty[$

10°) $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{(x^2+2x)^3}$; $I =]-2,0[$

EXERCICE N°9

1°)Déterminer trois réels a, b et c tels que : $x^2 = a.(x - 1)^2 + b.(x - 1) + c$.

2°) En déduire les primitives de f sur R tel que $f(x) = x^2(x-1)^{2009}$

EXERCICE N°10

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = x.\cos x$.

1°)Déterminer la dérivée de la fonction g définie sur R par : $g(x) = x.\sin x$.

2°)En déduire une primitive de f sur R

EXERCICE N°11

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{8x}{(x^2-4)^2}$

1°)Prouver qu'il existe deux réels a et b telles que : pour tout x de $R - \{-2,2\}$: on ait : $f(x) = \dfrac{a}{(x-2)^2} + \dfrac{b}{(x+2)^2}$

2°)Déduire les primitives sur $]-2,2[$ de f .

EXERCICE N°12

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I =]-∞ ; 2[par : $f(x)=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

1°) Déterminer les réels a et b, tels que pour tout réel x de l'intervalle I =]-∞ ; 2[: $f(x)=a+\dfrac{b}{(x-2)^2}$

2°) En déduire la primitive de f sur l'intervalle I =]-∞ ; 2[qui s'annule en x = 1.

EXERCICE N°13

Soit F la fonction définie sur]-∞ ; 1] par : $F(x)=x\sqrt{1-x}$

1°) a) Montrer que F est dérivable sur]-∞ ; 1[et étudier la dérivabilité de F en 1.
b) Calculer F'(x) pour tout x de]-∞ ; 1[.

2°) Déterminer une primitive de la fonction g définie sur]-∞ ; 1[par : $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

3°) Soit h la fonction définie sur]-∞ ; 1[par : $h(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$

a) Exprimer h(x) en fonction de F'(x) et de g(x).
b) En déduire une primitive H de h sur]-∞ ; 1[.
c) Déterminer la primitive H_0 *de h s'annulant en x = -3.*

EXERCICE N°14

Soit $f : x \mapsto f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1°) Etudier la dérivabilité de f sur R.
2°) Montrer que f est une bijection de R sur un intervalle J que l'on précisera
3°) Expliciter $f^{-1}(x)$ *pour* $x\in J$
4°)Montrer que f^{-1} *est dérivable sur J et calculer* $\left(f^{-1}\right)'(1)$.