

EXERCICE N°1

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2+3x}{1+x-x^2} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-x+x^2}{1+x-2x^2} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{3x}}{x-1} ; \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2-2}{x\sqrt{x}-\sqrt{8}} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2x}-x) ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+2}+x) ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{2\pi x-1}{3x-2}\right) ; \lim_{x \rightarrow 0} x \left(\sqrt{4+\frac{1}{x}}-2\right) ; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan(x)}{\cos(2x)} .$$

EXERCICE N°2

On considère la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3x + \sin x}{x-1}$.

Montrer que, pour tout $x \geq 2$, $|f(x) - 3| \leq \frac{4}{x-1}$. En déduire la limite de f en $+\infty$

EXERCICE N°3

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{1}{2 - \cos x}$.

1°) Montrer que, pour tout réel x , $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$.

b) En déduire les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(2 - \cos x)}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{2 - \cos x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2(2 - \cos x)}$

EXERCICE N°4

Soit la fonction f définie sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{-x + \cos x}{2x+1}$

1°) Démontrer que pour tout $x > -\frac{1}{2}$ on a : $\frac{-x-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \frac{-x+1}{2x+1}$

2°) En déduire la limite de f en $+\infty$.

EXERCICE N°5

Soit a et b deux réels et f la fonction définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{a-x}{x+1} & \text{si } x \in]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[\\ f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + b & \text{si } x \in [-2; 1] \end{cases}$$

Déterminer les réels a et b pour que f soit continue sur \mathbb{R} .

EXERCICE N°6

Soit f définie par $f(x) = \frac{ax^2 + (a^2 - 3)x - 3a}{x-1}$ si $x \neq 1$ et $f(1) = 4a$

Déterminer a pour que f soit continue en 1 .

EXERCICE N°7

Soit $f(x) = \frac{-x^2 - 3x - 2}{1 - |x+1|}$

1°) Déterminer le domaine de définition de f .

2°) Ecrire f sans valeur absolue.

3°) f est-elle continue en -1 .

EXERCICE N°8

Soit la fonction $f : x \mapsto 3x + 2 \sin x$

1°) a- Montrer que pour tout x de \mathbb{R} : $3x - 2 \leq f(x) \leq 3x + 2$

b- En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2°) Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{f(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{5} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a- Montrer que g est continue en 0.

b- Montrer que pour tout $x \in \left] \frac{2}{3}, +\infty \right[: \frac{x}{3x+2} \leq g(x) \leq \frac{x}{3x-2}$

c- En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. Interprète géométriquement le résultat.

EXERCICE N°9

Soit $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$ où $a \in \mathbb{R}$

1°) Déterminer le domaine de définition de f .

2°) Pour quelle valeur de a , f est continue en 0.

3°) Préciser suivant a , l'ensemble de continuité de f

4°) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x.f(x) + 1 - x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}.f(x)$

EXERCICE N°10

Soit $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2x-3} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2m-x}{2-x} & \text{si } 1 < x \leq \frac{3}{2} \\ \frac{x^2+1}{x^2+2x-4} & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases}$

1°) Trouver m pour que f soit continue en 1.

2°) Pour la valeur du réel m trouvée. Etudier la continuité de f en x

EXERCICE N°11

$f(x) = \begin{cases} (1+3a)x^2 - 3x & \text{si } x \in \left] -\infty, \frac{1}{2} \right] \\ \frac{x^3 - 8}{2x^2 - 5x + 2} & \text{si } x \in \left] \frac{1}{2}, 2 \right[\\ \sqrt{4x^2 - 1} - ax - 1 & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases}$

1°) Déterminer le domaine de définition de f .

2°) Etudier les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

3°) Peut-on déterminer a pour que f soit continue en 2.

4°) Préciser suivant a , l'ensemble de continuité de f .

EXERCICE N°12

1°) Démontrer que l'équation : $x^3 + x - 3 = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1; 2[$

2°) Utiliser la dichotomie pour donner une valeur approchée par défaut de cette α à 10^{-1} près.

EXERCICE N°13

On pose pour a réel strictement positif la fonction f_a définie sur $[0, a]$ par :

Pour tout $x \in [0, a]$, $f_a(x) = \frac{a-x}{a(a+x)}$.

1°) Montrer que f_a réalise une bijection de $[0; a]$ sur $[0; \frac{1}{a}]$. On note f_a^{-1} sa bijection réciproque.

2°) Donner le tableau des variations de f_a^{-1} en précisant les valeurs aux bornes.

3°) Montrer que $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$.

EXERCICE N°14

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{4x^2 + x} + 2x + 1$

1°) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0, +\infty[$

2°) Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3°) Sur quel ensemble f^{-1} est-elle continue ?

4°) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$

5°) Montrer que l'équation $f(x) = x + 2$ admet une solution unique $\alpha \in \left] \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right[$

EXERCICE N°15

Soit $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$.

1°) Déterminer le domaine de définition D_f de f .

2°) Étudier la dérivabilité de f sur D_f .

3°) Montrer que f est une bijection de $[0, 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera

4°) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$