

EXERCICE N°1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $u : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \end{cases}$

Partie A

- 1°) Calculer u_1 et u_2 . u est-elle une suite géométrique ? u est-elle une suite arithmétique ?
- 2°) Montrer que : pour tout n de \mathbb{N} : $2 \leq u_n \leq 5$.
- 3°) Montrer que (u) est croissante sur \mathbb{N} .
- 4°) En déduire que (u) est convergente et calculer sa limite.

Partie B

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 5$.

- 1°) Montrer que (v) soit une suite géométrique
- 2°) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- 3°) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- 4°) Soit pour tout n de \mathbb{N} : $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \sum_{k=0}^n v_k$ et $s'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$
 - a- Exprimer s_n puis s'_n en fonction de n
 - b- Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} s'_n$

EXERCICE N° 2

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $u : \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n} \end{cases}$

Partie A

- 1°) Montrer que : pour tout n de \mathbb{N} : $0 < u_n \leq 1$.
- 2°) Montrer que (u) est croissante sur \mathbb{N} .
- 3°) En déduire que (u) est convergente et calculer sa limite.

Partie B

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$.

- 1°) Montrer que (v) soit une suite géométrique
- 2°) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- 3°) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

EXERCICE N° 3

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $u : \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}} \end{cases}$

Partie A

- 1°) Montrer que : pour tout n de \mathbb{N} : $u_n \geq 1$.
- 2°) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} : $u_{n+1} - u_n = \frac{1-u_n^2}{2(u_{n+1} + u_n)}$
- 3°) En déduire le sens de variations de (u) .
- 4°) En déduire que (u) est convergente et calculer sa limite.

Partie B

On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n^2 - 1$.

- 1°) Montrer que (v) soit une suite géométrique
- 2°) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
- 3°) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

EXERCICE N°4

Soient a et b deux réels tels que $0 < a \leq b$ et (u_n) la suite définie par :

$$u_1 = a + b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : u_{n+1} = a + b - \frac{ab}{u_n}.$$

1°) On suppose que $a < b$.

(a) Montrer que (u_n) est minorée par b .

(b) Etudier la monotonie de la suite (u_n) en déduire qu'elle est convergente.

2°) Soit v la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* : v_n = \frac{u_n - b}{u_n - a}$

(a) Montrer que v est une suite géométrique.

(b) En déduire u_n en fonction de n , a et b

(c) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3°) On suppose que $a = b$.

(a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 en fonction de a .

(b) Exprimer alors u_n en fonction de n et a puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

EXERCICE N°5

On considère la suite réelle (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 3 - \frac{2}{u_n}$

1°) Montrer que (u_n) est minorée par 2.

2°) Etudier la monotonie de la suite (u_n)

3°) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

4°) Montrer par récurrence que : pour tout n de $\mathbb{N} : u_n = 2 + \frac{1}{2^{n+1} - 1}$

5°) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE N°6

Soit la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \sqrt{4 + 3x}$.

On considère la suite réelle u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$

1°) (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq 4$

(b) Etudier la monotonie de u .

(c) En déduire que u est convergente.

2°) (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 4| \leq \frac{3}{4} |u_n - 4|$

(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 4| \leq 4 \left(\frac{3}{4}\right)^n$. En déduire alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

EXERCICE N°7

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \frac{3v_n + u_n}{4} \end{cases}$

1°) Calculer u_1 et v_1 , u_2 et v_2 .

• u est-elle une suite géométrique ? u est-elle une suite arithmétique ?

• v est-elle une suite géométrique ? v est-elle une suite arithmétique ?

2°) On pose, pour tout entier naturel $n : x_n = u_n - v_n$.

• Montrer que (x) soit une suite géométrique

• Exprimer x_n en fonction de n .

3°) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N} : u_n \leq v_n$

4°) Montrer que (u) est croissante sur \mathbb{N} et (v) est décroissante sur \mathbb{N}

5°) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N} : u_n \leq 3$ et $v_n \geq 2$

6°) En déduire que (u) et (v) convergent vers la même limite.