Mathématiques http://afimath.jimdo.com/	NOMBRE COMPLEXE	Classe :4^{éme} *Inf* *Prof* AFIF BEN ISMAIL

Exercice

1. Soit $P(z)=z^3+\left(1-i\sqrt{2}\right)z^2+\left(74-i\sqrt{2}\right)z-74i\sqrt{2}$.

a) Montrer que l'équation *P*(*z*) = 0 admet une racine imaginaire que l'on déterminera.

b) Trouver deux nombres réels *a* et *b* tels que, pour tout nombre complexe *z*, on ait

$P(z)=\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)$.

c) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation *P*(*z*) = 0.

Correction

1) a)*iy* solution de l'équation *P*(*z*) = 0, soit $P(iy)=0$, soit

$-iy^3-\left(1-i\sqrt{2}\right)y^2+\left(74-i\sqrt{2}\right)iy-74i\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \left(y^2+\sqrt{2}y\right)+i\left(-y^3+\sqrt{2}y^2+74y-74\sqrt{2}\right)=0$.

Ceci donne le système $\begin{cases}-y^2+\sqrt{2}y=0\\ -y^3+\sqrt{2}y^2+74y-74\sqrt{2}=0\end{cases}$; la première ligne donne comme solutions $y=0$ qui ne convient pas dans la seconde ligne et $y=\sqrt{2}$ qui convient.

b) $P(z)=\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)=\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+z+74\right)$.

c) *P*(*z*) = 0 : $z^2+z+74=0$, $\Delta=1-296=-295=i^2\times5\times59$ d'où les racines

$$z_1=i\sqrt{2},\ z_2=\frac{-1+i\sqrt{295}}{2},\ z_3=\frac{-1-i\sqrt{295}}{2}.$$