Mathématiques http://afimath.jimdo.com/	LIMITES, CONTINUITÉ ET DÉRIVABILÉ	$4^{ème}$ INFO M AFIF BEN ISMAIL

EXERCICE 1 (VRAI OU FAUX)

Dans chacun des énoncés suivants, répondre par VRAI ou FAUX.

A/Pour toute fonction *f* continue sur [0 ; 1], à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a :

1. Si $f(0)=-1$ et $f(1)=1$ alors il existe un unique $x\in$[0 ; 1], tel que $f(x)=0$.
2. Si *f* est strictement croissante sur [0 ; 1], alors pour tout $y\in[f(0)\,;f(1)]$ il existe un unique $x\in$[0 ; 1] tel que $y=f(x)$.
3. Si $f(0)=0$ et $f(1)=1$ alors pour tout $x\in$[0 ; 1], $f(x)=x$.
4. Si *f* est dérivable sur [0 ; 1], $f(0)=0$ et $f(1)=1$, alors pour tout $x\in$[0 ; 1], $f'(x)\geq 0$.
5. Si $f(0)=-1$ et $f(1)=2$ alors il existe $\alpha\in$[0 ; 1] tel que $f(\alpha)=\alpha$.

B/

1.« Si a est un nombre réel quelconque et *f* une fonction définie et strictement décroissante sur $[a\,;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ».

2. Soient *f* et *g* deux fonctions définies sur [0 ; $+\infty$[, *g* ne s'annulant pas :

« Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-1$ ».

3. « Si *f* est une fonction définie sur [0 ; $+\infty$[telle que $0\leq f(x)\leq\sqrt{x}$ sur [0 ; $+\infty$[alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ».

EXERCICE 2

Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{x-4}{1-x^2}$, b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-4}{1-x^2}$, c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2+3}-3x$, d. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin(x)-1}{6x-\pi}$.

e. Sachant que $0\leq f(x)-1\leq|2\sin 3x|$ sur l'intervalle] 1 ; 10[déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)$.

EXERCICE 3

Soit *f* la fonction définie sur **P** par : $\begin{cases} f(x)=x^2-3 \text{ si } x\in\,]-\infty\,;1\,[\\ f(1)=-2 \\ f(x)=\sqrt{x-1}-2 \text{ si } x\in\,]\,1\,;+\infty[\end{cases}$

1. *f* est-elle continue en *x* = 1 ?
2. *f* est-elle dérivable en *x* = 1 ?
3. Quelles conséquences graphiques peut-on tirer des résultats précédents ? Tracer la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal. (Aucune étude de variations n'est demandée.)

EXERCICE 4

On considère les fonctions numériques f et g définies par :

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{x}\right) \text{ et } g(x)=2x^3+x^2-1$$

1. Montrer que pour tout $x \neq 0$, les nombres $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.

2. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α, avec $0 < \alpha < 1$. (On ne cherchera pas à calculer α). Préciser le signe de g suivant les valeurs de x.

3. Dresser le tableau des variations de la fonction f . On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité 3 cm), par I le point de (C) d'abscisse -1 et par J le point de (C) d'abscisse 1.

   a. Vérifier que la droite (IJ) est tangente en J à (C).

   b. Déterminer une équation de la tangente (T) en I à (C) .

   c. Etudier la position de (C) par rapport à (T).

4. Utiliser les résultats précédents pour construire la courbe (C) (on prendra 2/3 comme valeur approchée de α).

EXERCICE 5

Soit f la fonction définie par $f(x)=(2-x)\sqrt{4-x^2}$ et (C) sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. a. Justifier que f est dérivable sur $]-2\,;\,2[$.

b. Déterminer la fonction dérivée de f et montrer que, sur $]-2\,;\,2[$, $f'(x)$ est du signe de x^2-x-2.

3. Etudier la dérivabilité de f en $x=-2$, puis en $x=2$; donner une interprétation graphique des résultats obtenus.

4. Donner alors le tableau de variations de f .

5. Construire (C).