### *EXERCICE N°1*

*1°)Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :*

$z_0 = 3i + \frac{1}{i} - 2$ , $z_1 = (1+i)^2$ , $z_2 = (1-2i)^2$ , $z_3 = \frac{1}{3+2i}$ , $z_4 = \frac{1+2i}{2-3i}$ .

*2°)Déterminer le module de chacun des nombres complexes suivants :*

$z_0 = 3i - 2$ , $z_1 = (2+i)^2$ , $z_2 = \frac{1}{5+2i}$ , $z_3 = \frac{2-i}{i+3}$ , $z_4 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$

### *EXERCICE N°2*

*Soit* $z = 1-2i$ *et* $z' = -1+3i$

*Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes suivants :* $Z_0 = z \times z'$ , $Z_1 = \overline{z} \times z'$ ,

$Z_2 = z^2 \times \overline{z'}$ , $Z_3 = \frac{z-3}{\overline{z'}+2i}$

### *EXERCICE N°3*

*z désigne un nombre complexe différent de 2 i.*

*Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct* $(O,\vec{u},\vec{v})$ *(unité graphique: 3 cm). On désigne par A le point d'affixe 2 i. A tout point M du plan, distinct de A, d'affixe z, on associe le point M', d'affixe z' définie par* $z' = \frac{z+2i}{z-2i}$.

*1°)Calculer l'affixe du point N' image par f du point N d'affixe* $\sqrt{3}+i$ .

*2°) Calculer l'affixe du point Q dont l'image est le point Q' d'affixe 1 + i.*

*3°) Soit un complexe z distinct de 2 i, on pose : z = x + i y et z' = x' + i y', avec x, y, x' et y' réels.*

*Démontrer que :* $x' = \frac{x^2+y^2-4}{x^2+(y-2)^2}$ *et* $y' = \frac{4x}{x^2+(y-2)^2}$

*4°) Déterminer et représenter les ensembles de points M d'affixe z tels que :*

*a) z' est réel*

*b) z' est de module 1*

### *EXERCICE N°4*

*Soit* $Z = \frac{z+1}{z-2i}$ *avec* $z = x + iy$ *où* $x , y \in R$

*1°)Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et y .*

*2°)Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que Z soit un réel.*

*3°) Déterminer l'ensemble des points M , images de z , tels que Z soit imaginaire pur.*

### *EXERCICE N°5*

*Soient* $z_1 = \frac{2009+i2008}{2009-i2008}$ *et* $z_2 = \frac{2009-i2008}{2009+i2008}$

*Montrer que* $z_1 + z_2$ *est réel et que* $z_1 - z_2$ *est imaginaire pur.*

### *EXERCICE N°6*

*Soit a , b et c trois nombres complexes de modules sont égaux à 1 et tel que: a + b + c = 1.Calculer* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

### *EXERCICE N°7*

*Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé* $\left(O;\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ *on considère les points A , B et C d'affixes respectives* $z_A = 1+i$ , $z_B = 3+i$ *et* $z_C = 1-2i$ .

*1°) Placer les points A , B et C*

*2°)Calculer* $|z_A - z_B|$, $|z_A - z_C|$ *et* $|z_B - z_C|$.

*3°)En déduire la nature du triangle ABC.*

*4°)Déterminer l'affixe de point D tel que ABDC soit un rectangle .*

## *EXERCICE N°8*

*Soit z un nombre complexe tel que* $z = x + iy$ *avec* $x, y \in R$

*1°)Déterminer le plan complexe, l'ensemble E des points M d'affixe z tel que* $z^2$ *est un réel.*

*2°) Déterminer le plan complexe, l'ensemble F des points M d'affixe z tel que* $|z| = 1$.

## *EXERCICE N°3*

*1°)Déterminer les racines carrés des nombres complexes suivants*

*a)* $z_0 = -3$ *, b)* $z_1 = 3 + 4i$ *, c)* $z_2 = i$

*2°)Résoudre alors dans C les équation suivantes :*

*a)* $z^2 + z + 1 = 0$ *, b)* $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$ *, c)* $iz^2 + (1+i)z + \frac{1}{4} = 0$

## *EXERCICE N°9*

*Résoudre le système suivant :* $\begin{cases} 3z_1 - iz_2 = -i \\ 2iz_1 + z_2 = i \end{cases}$

## *EXERCICE N°10*

*A tout complexe z on associe le complexe :* $P(z) = 2z^2 + z + 5\bar{z}$ .

*1°) Calculer P(1 + i).*

*2°) Démontrer que si* $z = x + iy$ *avec* $x \in R$ *et* $y \in R$

*alors l'équation P(z) = 0 équivaut au système :* $\begin{cases} x(x+3) - y^2 = 0 \\ (x-1)y = 0 \end{cases}$

*3°) En déduire la résolution dans C de l'équation P(z) = 0.*

## *EXERCICE N°11*

*On considère l'équation (E) :* $z^2 + z + 1 + i = 0$

*On note par* $z_1$ *et* $z_2$ *les racines de (E ) .*

*1°)Déterminer les racines carrés de nombre complexe :* $b = -3 - 4i$

*2°) Résoudre alors dans C l'équation (E ).*

*3°) Ecrire sous forme trigonométrique et exponentielle* $z_1$ *et* $z_2$

*4°) Soit z un nombre complexe :* $z = x + iy$ *où* $(x, y) \in R^2$ *et* $Z = \frac{z - z_1}{z - z_2}$

*Soit M d'affixe z*

*a) Ecrire Z sous forme cartésienne*
*b) Déterminer l'ensemble des points M tel que Z est un réel.*
*c) Déterminer l'ensemble des points M tel que Z est imaginaire pur.*

*5°) On considère l'équation (E') :* $z^3 + (1 - i)z^2 + z + 1 - i = 0$

*a) Vérifier que i est une racine de l'équation (E').*
*b) Déterminer a et b tel que* $z^3 + (1 - i)z^2 + z + 1 - i = (z - i)(z^2 + az + b)$
*c) Résoudre alors dans C l'équation (E')*

*6°)Résoudre dans C l'équation :* $\left(\frac{z-2i}{z+1}\right)^3 + (1-i)\left(\frac{z-2i}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{z-2i}{z+1}\right) + 1 - i = 0$

## *EXERCICE N°12*

*Soit* $P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$.

*1°) Calculer P(1 + i).*

*2°) Démontrer que P(z) admet une unique racine imaginaire pure que l'on déterminera.*

*3°) Déterminer les réels a, b et c tels que :* $P(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$ *pour tout complexe z.*

*4°) Résoudre dans C l'équation :* $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

*En déduire les solutions de l'équation P(z) = 0 dans C.*

*5°) Soient A, B, C les points d'affixes respectives* $z_A = \sqrt{3} - i$, $z_B = \overline{z_A}$ *et* $z_C = 2i$.

*a) Faire une figure. Démontrer que A, B et C sont sur un même cercle de centre O.*
*b) Calculer* $z_B - z_A$ *et* $z_B - z_C$*, en déduire que le quadrilatère OABC est un losange.*

## *EXERCICE N°13*

*On considère le polynôme P défini sur C par :* $P(z) = z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 8z + 8$.

*1°) Justifier que :* $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$ .

*En déduire que si $z_0$ est une racine de P, alors son conjugué est aussi une racine de P.*

*2°) a) Résoudre l'équation $P(z) = 0$ sachant qu'elle admet deux racines imaginaires pures.*

*b) Déterminer la forme trigonométrique de chacune des solutions de l'équation précédente.*

*3°) Soient $M_1$, $M_2$, $M_3$ et $M_4$ les points d'affixes respectives $-2i$, $2i$, $-1 + i$ et $-1 - i$.*

*a) Placer les points $M_1$, $M_2$, $M_3$ et $M_4$ dans le plan complexe et démontrer que $M_1M_2M_3M_4$ est un trapèze isocèle.*

*b) Démontrer que les points $M_1$, $M_2$, $M_3$ et $M_4$ appartiennent à un même cercle de centre A d'affixe 1 dont on précisera le rayon.*

## EXERCICE N°14

*On considère l'équation (E) : $z^3 + (2-2i)z^2 + (5-4i)z - 10i = 0$ .*
*1°)Montrer que (E) admet un solution imaginaire pure.*
*2°)Résoudre alors (E) dans C.*

## EXERCICE N°15

*Résoudre dans C l'équation : $z^3 + (2-3i)z^2 - (7+i)z + 17i - 2 = 0$, sachant qu'elle admet une racine réelle.*

## EXERCICE N°16

*1°)Résoudre danc C l'équation : $Z^2 - 2Z - 3 = 0$*

*2°) Résoudre danc C l'équations : $z + \frac{1}{z} = -1$ et $z + \frac{1}{z} = 3$*

*3°)On considère l'équation (E) : $z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0$ .*

*a)Vérifier que (E) est équivalente au système :* $\begin{cases} Z = z + \dfrac{1}{z} \\ Z^2 - 2Z - 3 = 0 \end{cases}$

*b)En déduire la résolution de (E)dans C.*

## EXERCICE N°17 (BAC)

***Partie A :***

*On considère dans C : $f(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ où a , b et c sont des réels.*

*1°)a)Montrer que si f(2)=0 et f(1-i)=0 alors a , b et c vérifient le système :* $(S) : \begin{cases} 4a + 2b + c + 8 = 0 \\ b + c - 2 = 0 \\ 2a + b + 2 = 0 \end{cases}$

*b)Résoudre dans $R^3$ le système $(S)$.*

*2°)Dans la suite on prend $f(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$ .*

*a)Vérifier que pout tout nombre complexe z , on a : $f(z) = (z-2)(z^2 - 2z + 2)$.*

*b)Résoudre dans C l'équation $f(z) = 0$ .*

***Partie B :***

*Le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{e_1}, \vec{e_2}\right)$ on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et 1-i .*

*1°)Montrer que le triangle OAB est rectangle en B.*
*2°)Soit C le symétrique de B par rapport à l'axe des abscisses.*
*Montrer que OABC est un carré.*