EXERCICE N°1

Soit a et b deux réels et f la fonction définie sur R par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{a-x}{x+1} & si \quad x \in \left]-\infty ; -2\right[\cup \left]1 ; +\infty\right[\\ f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + x + b & si \quad x \in [-2 ; 1] \end{cases}$

Déterminer les réels a et b pour que f soit continue sur R.

EXERCICE N°2

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{ax^2 + (a^2 - 3)x - 3a}{x - 1}$ *si* $x \neq 1$ *et* $f(1) = 4a$

Déterminer a pour que f soit continue en 1 .

EXERCICE N°3

Soit $f(x) = \dfrac{-x^2 - 3x - 2}{1 - |x+1|}$

1°)Déterminer le domaine de définition de f .
2°)Ecrire f sans valeur absolue.
3°)f est-elle continue en -1 .

EXERCICE N°4

Soit la fonction $f : x \mapsto 3x + 2\sin x$

1°)a-Montrer que pour tout x de R : $3x - 2 \leq f(x) \leq 3x + 2$

b-En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2°)Soit la fonction g défini sur R par : $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{f(x)} & si \quad x \neq 0 \\ \dfrac{1}{5} & si \quad x = 0 \end{cases}$

a- Montrer que g est continue en 0.

b- Montrer que pour tout $x \in \left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$: $\dfrac{x}{3x+2} \leq g(x) \leq \dfrac{x}{3x-2}$

c- En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$*. Interprète géométriquement le résultat.*

EXERCICE N°5

Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ a & si \quad x = 0 \end{cases}$ *où* $a \in R$

1°)Déterminer le domaine de définition de f .
2°)Pour quelle valeur de a, f est continue en 0 .
3°)Préciser suivant a, l'ensemble de continuité de f
4°)Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x.f(x) + 1 - x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}.f(x)$

EXERCICE N°6

Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{2x-3} & si \quad x \leq 1 \\ \dfrac{2m - x}{2 - x} & si \quad 1 < x \leq \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 2x - 4} & si \quad x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$

1°)Trouver m pour que f soit continue en 1 .
2°)Pour la valeur du réel m trouvée. Etudier la continuité da f en $x_0 = 3/2$ *.*

EXERCICE N°7

$$f(x)=\begin{cases}(1+3a)x^2-3x & si \quad x\in\left]-\infty,\frac{1}{2}\right] \\ \dfrac{x^3-8}{2x^2-5x+2} & si \quad x\in\left]\frac{1}{2},2\right[\\ \sqrt{4x^2-1}-ax-1 & si \quad x\in[2,+\infty[\end{cases}$$

1°) Déterminer le domaine de définition de f .

2°)Etudier les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$

3°)Peut-on déterminer a pour que f soit continue en 2 .

4°)Préciser suivant a, l'ensemble de continuité de f .

EXERCICE N°8

1°)Démontrer que l'équation : $x^3 + x - 3 = 0$ *admet une unique solution* $\alpha\in\left]1;2\right[$

2°)Utiliser la dichotomie pour donner une valeur approchée par défaut de cette α *à* 10^{-1} *près .*

EXERCICE N°9

Montrer que l'équation $x^3 - 5x^2 + 4x + 7 = 0$ *admet au moins une racine réelle. Plus généralement, montrer que toute équation polynomiale de degré impair admet au moins une racine réelle. Qu'en est-il si le degré est pair ?*

EXERCICE N°10

On pose pour a *réel strictement positif la fonction* f_a *définie sur* $[\,0\,;a\,]$ *par :*

Pour tout $x\in[\,0\,,a\,]$, $f_a(x)=\dfrac{a-x}{a(a+x)}$.

1°) Montrer que f_a *réalise une bijection de* $[\,0\,;a\,]$ *sur* $[\,0\,;\frac{1}{a}\,]$ *. On note* f_a^{-1} *sa bijection réciproque.*

2°) Donner le tableau des variations de f_a^{-1} *en précisant les valeurs aux bornes.*

3°) Montrer que $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$.

EXERCICE N°11

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ *par* $f(x)=\sqrt{4x^2+x}+2x+1$

1°)Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0,+\infty[$

2°)Montrer que f est une bijection de $[0,+\infty[$ *sur un intervalle J que l'on précisera.*

3°)Sur quel ensemble f^{-1} *est-elle continue ?*

4°)Expliciter $f^{-1}(x)$ *pour* $x\in J$

5°)Montrer que l'équation $f(x)=x+2$ *admet une solution unique* $\alpha\in\left]\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right[$

EXERCICE N°12

Soit $f : x\mapsto f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$.

1°)Déterminer le domaine de définition D_f *de f.*

2°)Etudier la dérivabilité de f sur D_f .

3°)Montrer que f est une bijection de $[0,1[$ *sur un intervalle J que l'on précisera*

4°) Expliciter $f^{-1}(x)$ *pour* $x\in J$