

EXERCICE N°1

Soit la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - ax$

1°) Dans cette question on prend $a \neq 1$.

a) Montrer que pour tout $x > 0$: $f(x) = x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - a \right)$

b) Calculer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2°) Dans cette question on prend $a = 1$.

a) Montrer que pour tout $x > 0$: $f(x) = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - a}$

b) Calculer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3°) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

EXERCICE N°2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 1}{x - 2}$

Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\infty}$, $\lim_{|x| \rightarrow -\infty} (f(x) - x - 1)$

EXERCICE N°3

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^2 + 3x}{1 + x - x^2}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - x + x^2}{1 + x - 2x^2}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{3x}}{x - 1}$; $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x\sqrt{x} - \sqrt{8}}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x)$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2} + x)$; $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 7} - 3}{\sqrt{x + 2} - 2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{2\pi x - 1}{3x - 2}\right)$; $\lim_{x \rightarrow 0} x \left(\sqrt{4 + \frac{1}{x}} - 2 \right)$; $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan(x)}{\cos(2x)}$.

EXERCICE N°4

On considère la fonction f définie sur $[2 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3x + \sin x}{x - 1}$.

Montrer que , pour tout $x \geq 2$, $|f(x) - 3| \leq \frac{4}{x - 1}$. En déduire la limite de f en $+\infty$

EXERCICE N°5

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{1}{2 - \cos x}$.

1°) Montrer que, pour tout réel x , $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$.

b) En déduire les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(2 - \cos x)}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{2 - \cos x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2(2 - \cos x)}$

EXERCICE N°6

Soit la fonction f définie sur $\left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$ par : $f(x) = \frac{-x + \cos x}{2x + 1}$

1°) Démontrer que pour tout $x > -\frac{1}{2}$ on a : $\frac{-x - 1}{2x + 1} \leq f(x) \leq \frac{-x + 1}{2x + 1}$

2°) En déduire la limite de f en $+\infty$.